Intervalos e Inecuaciones

INTERVALOS: QUÉ SON

Cuando te dicen que «Secretaría está abierta de 8 a 14 horas», te están dando el *intervalo* de apertura del mismo. Denotaremos como $[8, 14]$ el conjunto de todos los números entre 8 y 14, ambos inclusive. Como los extremos están incluidos, el intervalo se dice **cerrado**.

Cuando queremos que los extremos no estén incluidos escribimos $(8, 14)$. En este caso el intervalo es **abierto**. 8 no está incluido, claro, pero $8'001$ sí lo está.

También puede haber intervalos mixtos: $[8, 14)$ significa «todos los números entre el 8 y el 14, pero el 8 entra y el 14 no». Acordándonos del símbolo $\in$, que significa «pertenece», diremos que $8 \in [8, 14)$, pero $14 \notin [8, 14)$. Por supuesto, $8'5 \in [8, 14)$ en cualquier caso.

También puede haber intervalos **infinitos**, cuando uno de los extremos «se nos sale». Así, $[4, \infty)$ significa el conjunto de todos los números mayores que 4. Al mismo tiempo, $(-\infty, 3)$ es el conjunto de todos los números que son (estrictamente) más pequeños que 3.

El conjunto de todos todos todos los números es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, claro. Ojo: cuando uno de los límites es infinito, siempre es un límite *abierto*. La razón es que ∞ no es un número de verdad y no puede estar contenido en un intervalo.

A veces queremos decir: «todos los números *menos* el 4», o «todos los números *menos* los que están entre el 0 y el 1». Indicaremos esto así: $\mathbb{R} - \{4\}$ y $\mathbb{R} - [0, 1]$ respectivamente.

E1. Expresa en forma de intervalos:

a) La temperatura máxima en este pueblo ha sido de 23 grados, pero nunca ha llegado a helar.

b) Pueden entrar en la discoteca los mayores de 18 años.

c) Todos los números menos los que están entre el 1 y el 10.

d) He medido la clase con una precisión de ± 1 cm y el resultado ha sido $6'24$ metros.

Una utilidad de los intervalos es, como en el último ejemplo, para denotar incertidumbre. Ninguna medida de una magnitud real se hace con total precisión. Si mido una mesa con una regla que no marca más que milímetros, obtendré (por ejemplo), que su longitud está entre $70'2$ y $70'3$ centímetros. Podré decir que la longitud de la mesa *es* $[70'2, 70'3]$ cm. En estos casos, llamaremos la **incertidumbre** en la medida al ancho del intervalo. En nuestro ejemplo, $0'1$ cm.

ARITMÉTICA CON INTERVALOS

E2. Sabiendo que el largo de una mesa es $[70'2, 70'3]$ cm. y que el ancho es $[20'7, 20'8]$ cm, ¿qué podemos decir sobre su área?

Habrás comprobado que, al calcular el valor del área, hay una estimación «pesimista» (cogiendo los extremos inferiores) y otra «optimista» (cogiendo los superiores). El valor *real* del área de la mesa tiene que estar entre esas dos estimaciones, así que formamos el nuevo intervalo con ellas. Pero ten mucho ojo. Observa el siguiente caso.

E3. Pepe tiene una cinta que mide $[17, 18]$ cm., y le corta un trozo que mide $[1, 1'2]$ cm. ¿Cuánto mide el trozo que le queda?

En este caso, el cálculo de la estimación pesimista y la optimista para el resultado es más complicada. La pesimista sale de restar el valor más pequeño para la cinta inicial *menos* el valor más grande para el trozo cortado. Así, podemos hacer con intervalos todas las operaciones aritméticas que podamos hacer con números. Pero lo que recomiendo siempre es *sentido común*.

E4. Haz los siguientes cálculos con intervalos.

a) $[1, 2] + [5, 6]$ b) $[2, 3] \cdot [7, 8]$

c) $[9, 10] - [1, 2]$ d) $[21, 20] \div [3, 5]$

e) $[1, 2]^2$ f) $[-1, 1]^2$

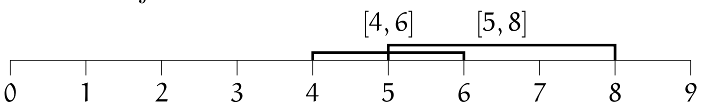
OPERACIONES CONJUNTISTAS CON INTERVALOS

Usaremos mucho el término *conjunto*. No es más que un «saco» que contiene elementos. En nuestro caso, qué le vamos a hacer, se trata de números.

- **Intersección**. La intersección de dos conjuntos es el conjunto de los elementos que están en los dos a la vez. Se expresa como $A \cap B$. En el caso de los intervalos, es la zona en la que *solapan*. Por ejemplo:

$$[4,6] \cap [5,8] = [5,6]$$

porque los elementos entre el 5 y el 6 pertenecen a los dos intervalos. Se puede ver con un dibujo:



En el caso en que los intervalos no *solapen*, no hay intersección. Se escribe así: $[1,2] \cap [8,9] = \emptyset$ y se dice que la intersección es **vacía**.

• **Unión**. La unión de dos conjuntos es el conjunto que contiene a todos los elementos de ambos, y se expresa como $A \cup B$. En el caso de antes,

$$[4,6] \cup [5,8] = [4,8]$$

Se puede simplificar gracias a que hay una zona de solapamiento. Así, por ejemplo, $[1,2] \cup [8,9]$ se queda así.

• **Complemento**. Es el conjunto «contrario» a uno dado y se escribe $\neg A$. Así, por ejemplo: $\neg[0,2]$ es el conjunto de números que **no** están entre 0 y 2. Es:

$$\neg[0,2] = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

Notad que son intervalos *abiertos*. La razón es que 0 y 2 pertenecían al conjunto original, así que no pueden pertenecer al complemento.

También puedes denotar elementos sueltos unidos a un intervalo. Así, por ejemplo, $[2,3] \cup \{4\}$ significa «cualquier número entre el 2 y el 3 (inclusive) y, además, el 4».

Inecuaciones: Qué Son y Técnica Básica de Solución

Si te preguntan por el conjunto de números que, cuando les multiplicas por 3, da un resultado «mayor que 12», tienes una inecuación entre las manos. Se escribe así: $3x > 12$.

Una inecuación difiere de una ecuación en que, en lugar de un signo de igualdad tienes otro de comparación: $>$, $<$, $\geq$ ó $\leq$. Así, por ejemplo, $2x+4 \leq 3$

significa: «halla el conjunto de números tales que, cuando les multiplico por 2 y sumo 4, el resultado es menor o igual que 3».

Nota que la solución de una inecuación no es un número, sino un conjunto de ellos. En general, un intervalo o una unión de intervalos. Así, la primera inecuación, $3x > 12$ tiene por solución el conjunto de números que sean mayores que cuatro. Así:

$$3x > 12 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (4, \infty)$$

Date cuenta de que el intervalo es abierto, porque el 4 está excluido. Como regla general (¡que no excluye al sentido común!), si el signo es $>$ ó $<$ el intervalo es abierto. Si es $\geq$ ó $\leq$, cerrado.

La técnica básica de solución de inecuaciones es la misma que la de ecuaciones con una salvedad fundamental:

> • Si se multiplica o divide los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

¿Qué significa eso? Veamos un ejemplo: $3 < 4$. Es cierto, ¿no? Si multiplicamos toda la desigualdad por 6, sigue siendo cierta: $18 < 24$. Si le restamos 4 a los dos miembros tampoco pasa nada: $-1 < 0$... El problema es si la multiplicamos por (-1): ¡$-3 \not< -4$! Más bien es al revés: $-3 > -4$.

Resolver la inecuación $3x + 4 > x - 2$.

Pasamos todas las x a la izquierda y los números a la derecha: $3x - x > -2 - 4$. Ahora simplificamos, $2x > -6$. Dividimos toda la ecuación entre 2 (positivo): $x > -3$. Solución: $x \in (-3, \infty)$.

Resolver la inecuación $x - 2 \leq 3x - 8$.

Nos empeñamos en pasar todas las x a la izquierda: $x - 3x \leq -8 + 2$. Simplificamos: $-2x \leq -6$. ¡Mucho ojo! Dividimos toda la ecuación entre (-2) y, por tanto, *cambiamos el signo a la desigualdad*: $x \geq 3$. Así, la solución es $[3, \infty)$.

¿No lo creéis? Comprobad que 4 cumple la inecuación, mientras que 2 no lo hace.

E5. Resuelve:

$$2x - 3 < x - 1 \qquad \frac{3x-2}{2} \le \frac{2x+7}{3} \qquad -3x - 2 < 5 - \frac{x}{2} \qquad \frac{3x}{5} - x > -2$$

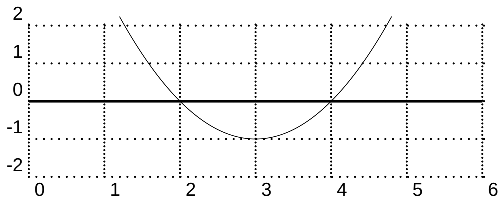
E6. Escribe una inecuación cuya solución sea $(-\infty, -2]$ y otra cuya solución sea $(1, \infty)$.

Inecuaciones de Grado Superior

Veamos los pasos a dar en la solución de una inecuación cualquiera en una variable con dos ejemplos. El primero será resolver:

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

Se trata de saber cuándo la expresión anterior es negativa. Se trata de una inecuación de segundo grado, así que no se puede «despejar» sin más... Habrá valores de la x para los que el bicho aquél sea positivo, y otros valores para los que será negativo, ¿no es así? Consideremos durante un instante ese bicho como una «función» y dibujémosla:



Sobre el dibujo nos preguntan cuáles son los valores del eje x para los que la función cae por «debajo» del eje horizontal, es decir: de 2 a 4. Pero, sin el dibujo, ¿qué hacemos?

Supongamos que estamos en un determinado punto, p.ej., $x = 0$, y que ahí la función es positiva (en concreto, aquí vale 8). Al movernos en el eje x, para que la función llegue a ser negativa tendremos que «*pasar por cero*». Es decir: si calculamos los valores para los que la función es cero, tendremos los puntos en los que se cambia de signo. Llamaremos a esos puntos los «puntos peligrosos».

¿Cuáles son los puntos peligrosos en nuestro caso? Las soluciones de la ecuación de segundo grado: $x^2 - 6x + 8 = 0$, así que $x = 3$ y $x = 4$. Eso nos separa el eje x en tres regiones:

$$-\infty \;\_\_\_\_\_\; 2 \;\_\_\_\_\_\; 4 \;\_\_\_\_\_\; \infty$$

¿Cuál es el signo en cada una de ellas? Sabemos que *lo normal* es que se cambie de signo en cada uno de los puntos peligrosos, pero no hay garantía de que esto pase. Lo mejor es comprobar el signo en cada una de las regiones. ¿Cómo lo hacemos?

Para la primera región tomamos cualquier punto que esté en ella. Por ejemplo, $x = 0$. Allí el signo es positivo ($0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$). En la segunda región tomamos, p.ej., $x = 3$. Allí es negativo ($3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1 < 0$). Para la tercera (aunque ya nos figuramos el resultado) tomamos, p.ej., $x = 5$, que da positivo ($5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 25 - 30 + 8 = 3 > 0$). Así nos queda la separación en regiones así:

$$-\infty \;\underset{\_\_\_\_\_}{\boxed{+}}\; 2 \;\underset{\_\_\_\_\_}{\boxed{-}}\; 4 \;\underset{\_\_\_\_\_}{\boxed{+}}\; \infty$$

Nos queda ya obvia la solución de la inecuación:

$$x^2 - 6x + 8 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (2, 4)$$

Y hemos dejado el intervalo abierto porque poníamos $<$ en lugar de $\le$.

Tomemos otra ecuación, pero esta vez algo más complicada:

$$\frac{11x - 18}{x^2 - 3} \ge 6 - x$$

Pásalo todo al mismo lado, dejando un 0 en el otro.

$$\frac{11x - 18}{x^2 - 3} + x - 6 \ge 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - 3} \ge 0$$

Hallamos los «puntos peligrosos» del bicho: pero no sólo los valores que le anulan, sino también los que le hacen «incalculable». En nuestro ejemplo son tanto los ceros del numerador como los del denominador. ¿Por qué? Porque son los puntos en los que puede haber un cambio de signo.

Ceros del numerador: 0, 2 y 4.
Ceros del denominador: $\pm\sqrt{3}$.

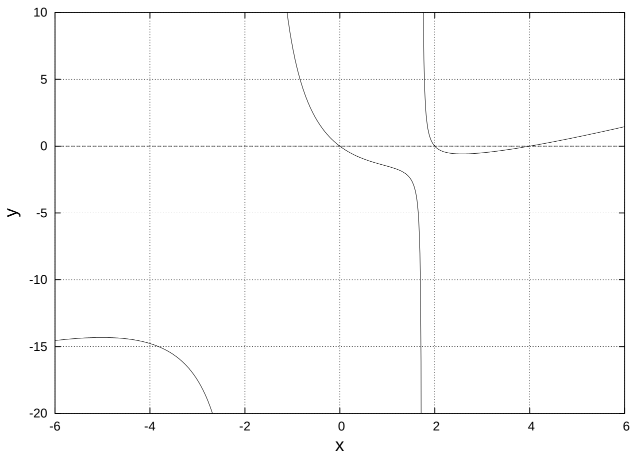
Estudiamos el signo del bicho en cada uno de los intervalos que nos quedan:

$$-\infty \;\_\_\_\_\_\; -\sqrt{3} \;\_\_\_\_\_\; 0 \;\_\_\_\_\_\; +\sqrt{3} \;\_\_\_\_\_\; 2 \;\_\_\_\_\_\; 4 \;\_\_\_\_\_\; \infty$$

El primer intervalo es de $-\infty$ a $-\sqrt{3} \approx -1'73$. Podemos probar, p.ej., en -2. Metiendo este valor en el bicho obtenemos un valor negativo (compruébalo). Lo más habitual es que los signos se vayan alternando a partir del primero, como ocurrión antes, pero ¡no lo des por supuesto! Comprueba cada uno por separado, y son:

$$-\infty \;\underline{\;\boxed{-}\;}\; -\sqrt{3} \;\underline{\;\boxed{+}\;}\; 0 \;\underline{\;\boxed{-}\;}\; +\sqrt{3} \;\underline{\;\boxed{+}\;}\; 2 \;\underline{\;\boxed{-}\;}\; 4 \;\underline{\;\boxed{+}\;}\; \infty$$

A partir de la gráfica se puede ver la misma secuencia de signos:



Puedes ver por qué los puntos clave son los ceros del numerador y los del denominador. En los puntos en los que se divide por cero es también posible que se cambie el signo de la función. La solución de la inecuación pedida es el conjunto de los intervalos en los que el signo del bicho es $+$ ó cero:

$$(-\sqrt{3}, 0] \cup (+\sqrt{3}, 2] \cup [4, \infty)$$

Y la razón de que el intervalo sea abierto en torno al $\pm\sqrt{3}$ es que en ese punto el bicho *no* es ni mayor ni menor que cero... ¡no está definido!

E7. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 + 20 < 9x$ b) $x^2 > 0$

c) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$ d) $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

E8. Escribe una inecuación cuya solución sea $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

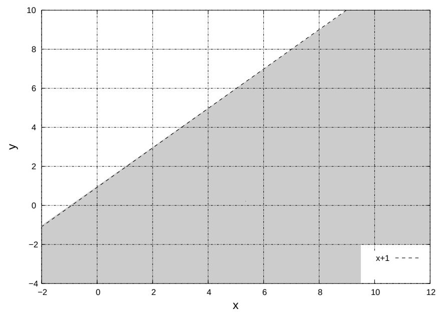
Sistemas de Inecuaciones

Nos pueden pedir, p.ej., averiguar cuáles son los puntos del plano que cumplen el par de condiciones:

$$\begin{cases} y < x + 1 \\ y \leq 10 - 2x \end{cases}$$

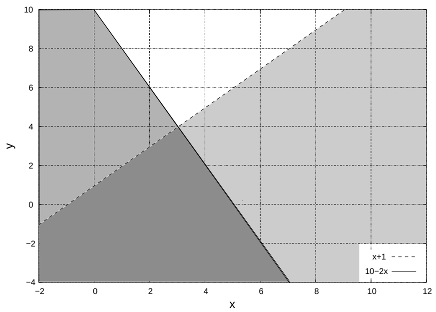
Veamos un ejemplo. ¿Cumple el punto $(6, 4)$ las condiciones? En este caso, $x = 6$ e $y = 4$. La primera condición es $4 < 6 + 1$, que sí se cumple. La segunda es $4 \leq 10 - 2 \cdot 6$, que *no* se cumple. Por tanto, decimos que el punto $(6, 4)$ *no* pertenece a la **región solución**. En cambio, puedes comprobar que el punto $(0, 0)$ sí cumple las condiciones y sí pertenece.

La región solución no es fácil de especificar de forma analítica, así que la daremos mediante un dibujo. Para ver qué puntos cumplen la primera condición dibujamos la gráfica de $y = x + 1$. Como no es $=$ sino $<$, *sombreamos* la parte del plano que queda por *debajo* de la gráfica: es el conjunto de puntos para los que la y es *menor* que la expresión $x + 1$, ¿no?



Ahora dibujamos la otra recta: $y = 10 - 2x$ y rayamos también la parte del plano que queda por debajo[1]:

[1] Si fuera $y \geq 10 - 2x$ rayaríamos la que queda por encima, claro.



La región que hemos rayado las dos veces es el conjunto de puntos que cumplen *las dos condiciones*. Por tanto, son la región solución de este sistema de inecuaciones.

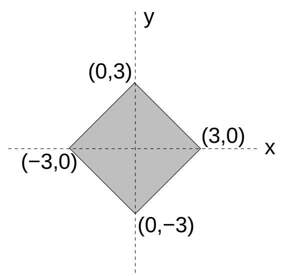
Nota que de las dos líneas que forman la frontera, la de la izquierda no pertenece a la solución y la de la derecha sí. Por esa razón hemos marcado una con una línea discontinua y la otra con un trazo continuo.

E9. Dibuja la región que es solución de los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} y > x - 2 \\ y \leq 4 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} y > x^2 \\ y < 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x + y < 10 \\ 2x - y > 4 \end{cases}$$

E10. Escribe un sistema de inecuaciones cuya solución sea un cuadrado que tenga de lado 1.

E11. Escribe un sistema cuya solución sea la figura siguiente:



Introducción a la Programación Lineal

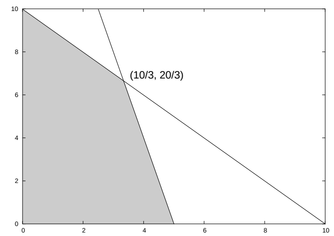
En muchos problemas de economía y similares se pide hallar los valores de varias variables, x e y en nuestro ejemplo, que hacen que una determinada

función tome valor máximo (o mínimo). El problema es que hay que cumplir una serie de restricciones. Veamos un ejemplo.

• Se pide maximizar $f = 3x + 2y$ sabiendo que se cumplen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y \leq 10 - x \\ y \leq 20 - 4x \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases}$$

Lo que tenemos que hacer ante todo es dibujar la región que cumple todas las restricciones. Esa región es un «polígono»:



Se dice que el problema es de *programación lineal* si la función f es un número por x más (o menos) otro número por y. En este caso, se sabe que el valor mínimo se tomará en alguno de los *vértices*.

¿Cuáles son los vértices? Del dibujo los vemos: $(0, 0)$, $(0, 10)$, $(10/3, 20/3)$ y $(5, 0)$. Calculamos el valor de la función f en cada uno de los puntos: 0, 20, $33'3$ y 15. Por tanto, el valor máximo se da cuando $x = 10/3$, $y = 20/3$, y $f = 33'3$.

E12. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas, y hacer una pulsera una hora. El material que tiene no le permite hacer más de 50 piezas. Por cada collar gana 5 € y por cada pulsera, 4 €. El artesano desea saber cuántas pulseras y cuántos collares debe hacer en un máximo de 80 horas para maximizar sus beneficios.