Matrices

Una de Zorros y Conejos

Una bióloga estudia la evolución de un ecosistema en el que hay conejos y zorros. Se ha metido en un buen lío matemático y quiere ver si podemos echarle una mano. Nuestra bióloga conoce la tasa de natalidad mensual de los conejos: un 5%. Es decir: si multiplicamos el número de conejos en un mes por $1'05$ obtenemos el número de conejos al mes siguiente. Así, por ejemplo, si el mes 1 hay 300 conejos, entonces el mes 2 habrá $1'05 \cdot 300 = 315$ conejos, ¿no? Dicho en una ecuación, $c_2 = 1'05 \cdot c_1$. Pero esto se cumple todos los meses, así que podemos escribir $c_{n+1} = 1'05 \cdot c_n$.

E1. Con la información que tenemos hasta el momento calcula cuánto valdrán c_3 y c_4.

Si has hecho el ejercicio anterior te habrás dado cuenta de que los conejos pronto saturarán el planeta... así que introducimos a los zorros. Pongamos por caso que cada zorro se coma 3 conejos al mes, y denotemos por z_n el número de zorros que hay el mes n-ésimo. Si el primer mes hay $z_1 = 16$ zorros, el número de conejos que hay al mes siguiente será:

$$c_2 = \text{Los que habría sin zorros} - \text{Los que se comen los zorros}$$
$$c_2 = 1'05 \cdot c_1 - 3 \cdot z_1 = 1'05 \cdot 300 - 3 \cdot 16 = 267$$

Parece que, en este caso, el número de conejos disminuye...

E2. Suponiendo que el número de zorros se mantiene fijo a 16, calcula cuántos conejos habrá al cabo de dos meses, tres, cuatro... (Acuérdate de aproximar los resultados finales por números enteros, ya que los conejos fraccionarios no se mantienen vivos mucho tiempo.)

Si has hecho el ejercicio anterior te habrás dado cuenta de que algo falla... los zorros acaban con todos los conejos y entonces se deberían morir de hambre. El número de zorros también debería variar: nacen nuevos, y mueren de hambre cuando hay pocos conejos.

Veamos cómo hacerlo. Supongamos que, en ausencia de conejos, cada mes muriera un 20% de los zorros. Eso significa que, si no hubiera conejos, cada mes habría que multiplicar el número de zorros por $0'8$. Así, tenemos la ecuación:

$$z_{n+1} = 0'8 \cdot z_n \qquad \text{En ausencia de conejos}$$

Pero, habiendo conejos suficientes, el número de zorros aumentará. Le preguntamos a la bióloga y nos dice que el número de zorritos que nacen cada mes es proporcional al número de conejos: $0'001 \cdot c_n$. Así, el número de zorros al segundo mes valdrá en realidad:

$$z_2 = 0'8 \cdot z_1 + 0'001 \cdot c_1 = 0'8 \cdot 16 + 0'001 \cdot 300 = 13'1$$

Así que, parece que el número de zorros decrece... ¡a los conejos les terminará por ir bien! Pero el problema de la bióloga viene ahora. Ella quiere saber la población de zorros y conejos dentro de un año, de cinco y de diez. Su prima matemática le dice que escriba primero las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} c_{n+1} = 1'05 \cdot c_n - 3 \cdot z_n \\ z_{n+1} = 0'001 \cdot c_n + 0'8 \cdot z_n \end{cases}$$

Y, además, sabemos que $c_1 = 300$ y $z_1 = 16$. ¿Calculamos el primer mes?

$$\begin{cases} c_2 & = & 1'05 \cdot c_1 - 3 \cdot z_1 & = & 267 \\ z_2 & = & 0'001 \cdot c_1 + 0'8 \cdot z_1 & = & 13'1 \end{cases}$$

Calculamos otro mes (c_3 y z_3) introduciendo en la misma fórmula los resultados para c_2 y z_2:

$$\begin{cases} c_3 & = & 1'05 \cdot c_2 - 3 \cdot z_2 & = & 1'05 \cdot 267 - 3 \cdot 13'1 & = & 241'05 \\ z_3 & = & 0'001 \cdot c_2 + 0'8 \cdot z_2 & = & 0'001 \cdot 267 + 0'8 \cdot 13'1 & = & 10'747 \end{cases}$$

El número de conejos y el de zorros cae... ¿se extinguirán? ¿o quizás el número de conejos volverá a aumentar cuando el de zorros baje suficientemente? ¿qué crees? ¡Vamos, investiga!

El problema que hemos propuesto es analizar un **modelo matemático**. Un modelo matemático *no* es la realidad, sino una simplificación que resulta útil a l@s científic@s de todas las ramas para poder hacer predicciones y entender lo que pasa. Este modelo presenta multitud de simplificaciones. Por ejemplo, no considera más que dos especies, mientras que en realidad siempre hay muchísimas. ¿Se te ocurre alguna simplificación más?

Vectores y Matrices

El trabajo de la bióloga parece arduo... así que vamos a intentar simplificarlo. Ya sabéis: la matemática es importante para poder vaguear. En muchos casos, una buena notación ayuda tremendamente. Nuestro ecosistema, en cada momento, viene descrito por *dos valores*: el número de conejos c_n y el número de zorros z_n. Por tanto diremos que el «estado del sistema» es un par de números puestos en columna y entre paréntesis. Por ejemplo, al inicio,

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

La componente de arriba son los conejos, claro está. Este tipo de objeto, con varios números en columna, se llama un **vector**. Ahora bien: para «*pasar de este mes al siguiente*» lo que hacemos es siempre esta operación:

$$\begin{cases} c_{n+1} = 1'05 \cdot c_n - 3 \cdot z_n \\ z_{n+1} = 0'001 \cdot c_n + 0'8 \cdot z_n \end{cases}$$

Este tipo de operaciones se hacen con mucha frecuencia, así que les daremos una notación simplificada especial. Atent@s a la jugada:

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

La caja con cuatro números se llama una **matriz**, y escribirla no requiere más que poner los coeficientes en una tabla. Dos precauciones (que aquí caéis como chinches): hay que ponerlos en orden correcto y hay que acordarse de su signo.

E3. Un par de ejemplos. En el primero, tenéis que escribir en notación matricial el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{cases} A = 2 \cdot a - 3 \cdot b \\ B = -a + 4b \end{cases}$$

Ahora unos cuantos un poco más difíciles (acuérdate de ordenar bien):

$$\begin{cases} F = u - v \\ G = v - u \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = 2x - 3z + y \\ A_2 = y - z + 3x \\ A_3 = z - y \end{cases}$$

E4. Ahora, al revés. Expande en forma de par de ecuaciones «*normales*»:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Y, sabiendo que $x = 3$ e $y = 2$, calcula cuánto valen V_1 y V_2.

Matrices y vectores no son más que *taquigrafía*. Son útiles si los usas bien, porque ahorran trabajo. Pero, como ya te ha pasado más veces en matemáticas, no son la solución a un problema, sino una herramienta de trabajo.

Nomenclatura de Vectores y Matrices

Vamos a dar unas cuantas definiciones necesarias. Un **vector** es una ristra de números en fila. Su **dimensión** es la cantidad de números que encierra. Una Una **matriz** es una tabla de números. Su **dimensión** es el número de filas y el número de columnas. Así, por ejemplo, una matriz 2×3 tiene 2 filas y 3 columnas.

Un vector columna (vamos, un vector normal) es una matriz de dimensión $m \times 1$, y un vector fila, $1 \times n$. Consideremos una matriz de dimensión $m \times n$. Si $m = n$, tenemos una **matriz cuadrada**.

E5. Di la dimensión de los siguientes "objetos" (vectores o matrices):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se llama **traspuesta** A^t de una matriz A a la que resulta de «intercambiar» filas y columnas. Un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A veces nos pueden preguntar por un elemento de una matriz, dándonos su número de fila y su número de columna. Así, p.ej., $A_{12} = 2$ y $A_{23} = 6$.

Se llama **diagonal principal** de una matriz cuadrada a los elementos A_{11}, A_{22}... hasta A_{nn}. Una matriz se dice que es **diagonal** cuando sólo tiene elementos no nulos en su diagonal principal. Una matriz es **simétrica** cuando $A = A^t$, es decir, cuando $A_{ij} = A_{ji}$. Por supuesto, tiene que ser cuadrada. Una matriz se llama **triangular** cuando no tiene más que ceros debajo (o encima) de su diagonal principal.

Va un ejemplo. Observa las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Observa cómo B es simétrica, C es triangular (inferior) y D es diagonal. Una matriz muy especial es la **matriz identidad** I, que es una matriz cuadrada diagonal que sólo tiene 1's. Así, p.ej., la matriz identidad de dimensión 2 es:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consejo: todas estas definiciones no son para que te las aprendas ya, sino para que tengas un lugar de referencia cuando las nombremos.

Operaciones Sencillas con Vectores y Matrices

Con vectores hay dos operaciones bien tontas que tienes que saber hacer. Se pueden sumar (y restar, claro) entre sí, y se pueden multiplicar por un número dado. Así, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Más fácil que el mecanismo de un chupete, ¿a que sí?

E6. Considera el vector V que tiene dos componentes: 2 y 5. Calcula cuánto vale el vector $W = 3 \cdot V$ y luego calcula $V + W$.

E7. ¿Y con matrices? ¡Igual! Prueba tú directamente:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicar una Matriz por un Vector

¿Qué significa una expresión del siguiente tipo?

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz que "*actúa*" sobre un vector, y al final obtendremos *otro vector distinto*. Veamos cómo se hace.

El vector de la derecha se *tira en plancha* sobre la matriz, de manera que el 6 coincide con el 1 y el 2 coincide con el 5. Cuando los números coinciden, se multiplican: $6 \cdot 1 = 6$ y $2 \cdot 5 = 10$, ¿no? Ahora suma los resultados: $6 + 10 = 16$. Anotamos el 16. Pero el vector que se ha lanzado sigue cayendo por la matriz, y se encuentra con la segunda fila. Ahora el 1 coincide con el 4 y el 5 con el -3, así que tenemos por un lado $1 \cdot 4 = 4$ y $5 \cdot (-3) = -15$. Sumamos los dos números y tenemos -11. Pues bien: ya tenemos las dos componentes del vector resultado: 16 y -11. En esquema,

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 10 \\ 4 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -11 \end{pmatrix}$$

E8. Ahora te toca. Averigua cuánto valen:

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nota importante: No toda matriz puede actuar sobre cualquier vector. Como el vector se debe tirar en plancha sobre ella, tiene que ajustar perfectamente, es decir: **el vector tiene que tener tantos elementos como columnas tiene la matriz**.

E9. De las siguientes multiplicaciones di cuáles se pueden hacer (y hazlas) y cuáles no (y no las hagas).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Supongo que te habrás dado cuenta de la regla general. Una matriz $m \times n$ se puede multiplicar siempre por un vector de dimensión n, resultando otro vector, pero de dimensión m. (¡Lee otra vez la frase!)

Aplicaciones del Producto de Matrices por Vectores

Para entender bien qué narices significa, vamos a ver algún ejemplo más de aplicación.

Un farmacéutico tiene dos tipos de pastillas. La A proporciona (por unidad) 2 mg de patastrato, 3 mg de cafeína y 10 de azúcar. La B proporciona 6 mg de patastrato, 1 de cafeína y 12 de azúcar. Prepara una mezcla de 15 pastillas A y 20 B para dársela a un pobre paciente. ¿Qué cantidades de patastrato, cafeína y azúcar está consumiendo?

Por supuesto, este ejercicio se puede apañar sin matrices. Es lo primero que vamos a hacer, para luego comprobar que está todo bien.

$$\text{mg de patastrato} = 2 \cdot 15 + 6 \cdot 20 = 150$$
$$\text{mg de cafeína} = 3 \cdot 15 + 1 \cdot 20 = 65$$
$$\text{mg de azúcar} = 10 \cdot 15 + 12 \cdot 20 = 390$$

Vale. Ahora veamos el problema desde otro punto de vista. Nos dan los números de pastillas y nos piden los miligramos de las tres sustancias. Así que tenemos que escribir una matriz que nos permita «*pasar*» de pastillas a miligramos. Llamando p al patastrato, c a la cafeína y a al azúcar, podemos escribir la matriz[1]

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ c \\ a \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Que nos permite hacer la siguiente multiplicación (dejamos las etiquetas, pero recuerda que no sirven más que para indicar):

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ c \\ a \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} p \\ c \\ a \end{array} \begin{pmatrix} 150 \\ 65 \\ 390 \end{pmatrix}$$

Para acordarnos, podemos pensar que la A y la B, que indican tipos de pastillas, se «matan entre sí» y nos dejan sólo los miligramos...

El problema siguiente es similar: se puede resolver usando el producto de una matriz por un vector, aunque también se puede hacer de otra forma.

E10. En la Escuela Superior de Patastratología hay tres cursos. De los alumnos de primero, el 25% repite y el 65% pasa a 2^0 (el resto abandona).

[1] OJO: Pon siempre el dato «que tienes» (pastillas) en la horizontal, y el «que te piden» (miligramos) en la vertical.

De los de segundo, el 15% repite y pasa el 85% a 3^0. De los de tercero, repite el 30% y el resto se licencia. Si en primero hay 200 alumnos, 100 en segundo y 100 en tercero, averigua cuántos alumnos habrá al año que viene en cada curso (salvo los nuevos).

La Matriz como Operador

Volvamos a nuestro problema biológico. Habíamos escrito el «paso de un mes siguiente» de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Llamemos V_n al vector que representa el estado del ecosistema en el mes n-ésimo, y llamemos M a la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos escribir la ecuación de manera mucho más sencilla:

$$V_{n+1} = M \cdot V_n$$

es decir: si tienes el estado en el mes n-ésimo, multiplícalo por la matriz M y tendrás el estado al mes siguiente. Diremos que la matriz es un «operador» que simula el efecto del paso de un mes en nuestro ecosistema.

Hay una matriz que al actuar no hace absolutamente nada. Es la que hemos llamado antes la **matriz identidad**. Comprueba que, al hacer una multiplicación del tipo $\mathrm{I} \cdot V$ volvemos a obtener el mismo V. Un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para resolver el problema de la bióloga de manera rápida e indolora nos proponemos lo siguiente: ¿no habría manera de encontrar la matriz que representa el paso de un año, en lugar de un mes?

Producto de Matrices

Empecemos por algo más fácil. ¿Podemos encontrar la matriz que representa el paso de *dos* meses? Veamos. Supongamos que tenemos inicialmente c conejos y z zorros. Al cabo de un mes tendremos:

$$\begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'05c - 3z \\ 0'001c + 0'8z \end{pmatrix}$$

Ahora podemos hacer pasar un mes sobre el resultado de esa operación

$$\begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1'05c - 3z \\ 0'001c + 0'8z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'05(1'05c - 3z) - 3(0'001c + 0'8z) \\ 0'001(1'05c - 3z) + 0'8(0'001c + 0'8z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1'0095 \cdot c - 5'55 \cdot z \\ 0'00185 \cdot c + 0'637 \cdot z \end{pmatrix}$$

¡Esperad! Podríamos escribir la «matriz bimensual» de esta forma:

$$V_{n+2} = \begin{pmatrix} 1'0095 & -5'5 \\ 0'00185 & 0'0637 \end{pmatrix} V_n$$

Pero la manera en la que hemos obtenido esta matriz era un rollo. ¿No hay algún truco? Sí lo hay, y le llamaremos **producto de matrices**.

Multiplicar una matriz por otra es equivalente a multiplicar la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda como si fueran vectores sueltos. Es decir: cogemos la primera columna de la matriz de la derecha y la «lanzamos en plancha» sobre la matriz de la izquierda. Obtenemos así un vector resultado que será la primera columna de la matriz resultado. Veamos un ejemplo simple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Primero, «mentalmente», elegimos la primera columna de la matriz de la derecha, que es $(5, 7)$ y la lanzamos sobre la matriz de la izquierda, obteniendo un nuevo vector columna: $(19, 43)$. Ya tenemos la primera columna de la matriz solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & \\ 43 & \end{pmatrix}$$

Ahora elegimos la segunda columna de la matriz de la derecha: $(6, 8)$ y repetimos la operación, obteniendo $(22, 50)$. En resumen,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Precaución: No siempre que os dé dos matrices se pueden multiplicar entre sí. Si la dimensión de la primera es $m_1 \times n_1$ y la de la segunda es $m_2 \times n_2$, la condición es que $n_1 = m_2$, es decir: que la primera tenga tantas columnas como la segunda filas. Básicamente, que cada vector columna de la segunda matriz «encaje» bien al lanzarse sobre la primera.

Bien, sabiendo esto, veamos cómo calcular la matriz «bimensual»:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'0995 & -5'55 \\ 0'00185 & 0'637 \end{pmatrix}$$

¡Es la misma matriz que antes! Sacamos una conclusión: **el producto de dos matrices me da la matriz que «resume la aplicación de las dos».**

E11. (Solución al problema de la bióloga). Obtén, multiplicando por sí misma la matriz de dos meses, la de cuatro meses. Después obtén la de ocho meses y, con la anterior, la de un año.

E12. Aplica la matriz de un año sobre el vector inicial del ecosistema (es decir, 300 conejos y 16 zorros). Averigua la población al cabo de 5 y de 10 años.

E13. Efectúa las siguientes multiplicaciones de matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

E14. Un economista tiene el siguiente modelo para la tasa de inversión y la de desempleo. Predice que, si en el mes n-ésimo son i_n y d_n, al mes siguiente serán:

$$\begin{cases} i_{n+1} = 0'7 \cdot i_n + 1'3 \cdot d_n \\ d_{n+1} = d_n - 0'3 \cdot i_n \end{cases}$$

Si al día de hoy estas tasas son del 10% y del 15%, averigua cuánto serán dentro de un mes, dos meses y un año.

E15. Tres empresas, A, B y C, consumen hierro, cobre y plomo según la matriz M_1 (en Tm). El precio del hierro, del cobre y el plomo (por Tm) durante los años 1998 al 2001 viene dado en la matriz M_2. ¿Podrías obtener el gasto total de cada una de las empresas en cada uno de estos años?

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Hie.} & \text{Cob.} & \text{Plo.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 8 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \\ \text{Hierro} \\ \text{Cobre} \\ \text{Plomo} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 98 & 99 & 00 & 01 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 27 & 30 & 32 \\ 47 & 47 & 49 & 50 \\ 10 & 12 & 12 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propiedades de la Multiplicación de Matrices

La multiplicación de matrices se comporta como cualquier otra multiplicación salvo en un aspecto: *no es conmutativa*. Es decir: $A \cdot B \neq B \cdot A$. ¿Os parece muy raro? No lo es tanto. Suponed que A es «ponerte unos calzoncillos» y B es «ponerte unos pantalones». Si hacemos (en este orden) AB, somos gente normal. En cambio, si hacemos BA, pareceremos Supermán y tendremos superpoderes. En la vida diaria estamos muy acostumbrados a que las cosas no conmuten...

E16. Comprueba si las matrices siguientes conmutan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, hay que tener mucho cuidado con el orden en el que se hacen las operaciones con matrices.

E17. La matriz identidad conmuta con todas las demás matrices. ¿Sabrías decir por qué?

Otras cosas raras que pueden suceder con el producto de matrices: $AB = AC$ *no* implica que $B = C$, como puedes comprobar con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pero sí se puede hacer cosas como: $A(B + C) = AB + AC$ (¡importa el orden!), como puedes comprobar con las mismas matrices.

E18. Comprueba, con las matrices anteriores A y B que no se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, pero que sí se cumple que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$.

Matriz Inversa

Volvamos un momento a la biología. Supongamos que nos dicen que en un mes determinado el número de conejos es de 150 y la de zorros es $16'2$[2]. ¿Cuáles fueron las poblaciones durante el año anterior? Podemos abordar el problema de dos maneras. La primera es resolver un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1'05 & -3 \\ 0'001 & 0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 16'2 \end{pmatrix}$$

Pero hay un segundo sistema más interesante. ¿No podríamos obtener la matriz que simula el paso de un «mes hacia atrás»? Sí, y se llama la **matriz inversa**. La matriz inversa de A se escribe A^{-1} y es la que «deshace el efecto de A». Aún no sabemos cuánto vale A^{-1}, pero tenemos clara una cosa: aplicar A y después aplicar A^{-1} es como «no hacer nada». En otros términos,

$$A^{-1} \cdot A = I$$

porque la matriz identidad I es la que no hace nada.

Si os habéis fijado, podíamos resolver el mismo sistema mediante un sistema de ecuaciones, para el que se emplea el método de Gauss. Vamos a extender ese método para calcular la inversa. Lo que primero hacemos es «ampliar» la matriz añadiendo la matriz identidad a la derecha:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora hacemos operaciones con las filas como las hacíamos al resolver los sistemas, pero ahora con el objetivo de convertir *el lado izquierdo en la matriz identidad*. Lo que nos quede al lado derecho será la «matriz inversa» de la que inicialmente había. Siguiendo con el ejemplo,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_2-4F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[4F_1-5F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 24 & -15 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1/12,F_2/4]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 3/4 \end{array}\right)$$

Por último, grandioso final, comprobamos que el producto de A^{-1} por A da la identidad:

[2] Ya sé, ya sé: los zorros fraccionarios no sobreviven mucho, pero así sale mejor.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Eso significa: si aplicamos sobre cualquier vector A y luego aplicamos su inversa, será lo mismo que si no hubiésemos hecho nada. Por supuesto, también al revés: $A \cdot A^{-1} = I$.

E19. Calcula la matriz inversa de las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(¿Te has dado cuenta? Algunas matrices *no tienen inversa*).

Fijaos en que *cualquier sistema de ecuaciones* se puede resolver conociendo la inversa de la matriz de coeficientes. Un ejemplo. Si tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ 4x + 8y = 16 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Como conocemos la matriz inversa, A^{-1}, podemos multiplicarla a ambos lados por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Pero $A^{-1} \cdot A = I$, que no hace nada, así que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5/4 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E20. Utilizando las matrices del ejercicio anterior, resuelve los sistemas de ecuaciones:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

E21. Volvamos al problema de biología. Calcula la inversa de la matriz M y di qué significa. Resuelve el problema del principio de la sección.

E22. Halla, en el ejemplo anterior, la solución del sistema poniendo como términos independientes primero el vector $(1, 0)$ y luego el $(0, 1)$. Llama a la primera solución X_1 y a la segunda, X_2.
a) Observa que la matriz inversa tiene por columnas, precisamente, X_1 y X_2.
b) Comprueba (poniendo un ejemplo) que se puede obtener la solución para cualquier vector de términos independientes, (α_1, α_2), y que ésta es $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$.
c) A partir de aquí, intenta explicar por qué el método de Gauss funciona para la obtención de la matriz inversa.

Ejercicios Inclasificables

E23. Comprueba que $(A - I)^2 = 0$, donde I es la matriz identidad, 0 es la matriz nula y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E24. Calcula la potencia n-ésima de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E25. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Halla la matriz $3A^tA - 2I$.

b) Resuelve la siguiente ecuación matricial: $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

E26. Si A es una matriz tal que $A^2 = A$ y $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad, calcula B^2.

E27. Calcula el x que cumple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

E28. Halla todas las matrices que conmuten con

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

E29. Calcula las matrices A y B que son solución del sistema

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$