Probabilidad

Idea de Probabilidad

La idea básica de la teoría de la probabilidad es que, si bien hay muchos eventos respecto a los que tenemos *incertidumbre*, esta incertidumbre es **medible**. En otros términos: «mañana lloverá» y «el Cádiz ganará la Champion's en este siglo» son ambos eventos que no son ni seguros ni imposibles. Pero, mientras que el primero tiene una probabilidad alta, el segundo la tiene baja. ¿Cómo de alta y cómo de baja? Los dos eventos son complejos, intervienen muchos factores...

Las probabilidades son números entre cero (imposible) y uno (seguro). Así, por ejemplo, la probabilidad de que una chicheta caiga con la punta hacia abajo es de (aprox.) $0'18$. Eso significa que, si tiras 100 chinchetas al aire, «aproximadamente» 18 caerían con la punta hacia abajo. ¿Es *seguro* que serán 18? ¡No! Pero, si tienes que apostar por algún número, lo mejor es hacerlo por 18.

En este ejemplo de la chincheta, ¿cómo se ha calculado esa probabilidad? No es difícil: hacemos un experimento, como en física. Tiramos (pongamos por caso) 500 chinchetas y contamos cuántas caen con la punta hacia abajo. Nos salen 90. Así que dividimos las que han salido entre las totales: $90/500 = 0'18$. Este número es, en realidad, la **frecuencia relativa** del proceso:

$$\text{Frecuencia relativa de } S = \frac{\text{Veces que ocurre } S}{\text{Total de veces}}$$

«Obviamente», la frecuencia relativa de un evento se va acercando a su probabilidad cuando el número de veces que se repite el experimento es muy alto. También «obviamente», la probabilidad de que *no* caiga con la punta hacia abajo será lo que falte hasta la unidad: $1 - 0'18 = 0'82$.

Q1. Discute el significado de esta frase: «la probabilidad de que llueva mañana es de $0'75$».

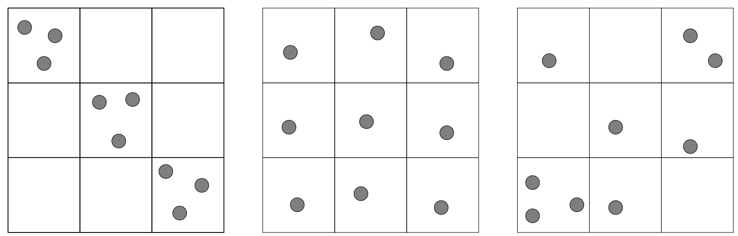
Pero hay probabilidades mucho más difíciles de calcular: ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana? ¿y de que el Atleti gane la liga? ¿y de que la economía mejore? Aunque los especialistas dan valores para éstas, no dejan de ser *estimaciones* basadas en su conocimiento.

Y si se tiene un conocimiento perfecto, ¿habría necesidad de probabilidades? De otra forma: al lanzar *esta* chincheta, ¿va a caer hacia arriba o hacia abajo? Si conocieras exactamente la forma de la chincheta, cómo va a ser lanzada, la rugosidad del suelo, la temperatura, si hay corrientes de aire... lo podrías predecir con seguridad. ¿O quizás no? Dice la física moderna que, *incluso sabiendo todo eso* hay una cierta incertidumbre esencial. Tú, ¿qué piensas?

Q2. Un jugador de ruleta comprueba que no ha salido el 17 en toda la tarde. Por tanto, deduce, ahora es más probable que salga. ¿Tiene razón?

Q3. La profe de mates ha dicho que mañana sacará a alguien para preguntarle la lección. María piensa: «no hay mucho peligro de que me toque a mí: somos 30 en la clase». Luego la profe dice que va a sacar a una chica. María piensa: «algo más de peligro, sólo somos 12 chicas». La profe añade que sacará a una chica con gafas. María respira aliviada. Observa cómo, según va teniendo más información, María va cambiando su estimación de las probabilidades. ¿Notas algo destacable?

Q4. Sobre una hoja de papel han caído 9 gotas de tinta al azar. ¿Cuál de las siguientes situaciones te parece más probable?



Principio de Indiferencia y Regla de Laplace

Vamos a estudiar ejemplos mucho más simples. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 4 en un dado? Aplicaremos el **principio de indiferencia**: como no sabemos nada sobre el dado, sobre cómo se tira... suponemos que cada cara del dado es igual de probable (**equiprobable**). Por tanto, el 4 tiene una posibilidad entre seis. Lo escribiremos $1/6$. [Podríamos decir $0'166...$, pero normalmente dejaremos la fracción.]

Insistimos: el 4 no tiene por qué salir «una de cada 6 veces». En realidad, cabe la posibilidad de que no salga en 20 veces, o que salga varias veces seguidas.

Lo que sí es cierto es que, si tiras el dado *muchísimas* veces[1], obtendrás el 4 un $16'66...\%$ de las veces.

Imagina que nos piden la «probabilidad de que salga un valor par al tirar un dado». De las seis posibilidades, *tres* nos son favorables: 2, 4 y 6. Por tanto, podemos decir que saldrá par «tres de cada seis veces» o, lo que es lo mismo, $1/2$.

Esta última idea se llama la **regla de Laplace**: la probabilidad de cualquier suceso es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles (siempre que los casos, como es lógico, sean equiprobables):

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Un ejemplo: calculamos la probabilidad de sacar un rey en una baraja española. Como hay cuatro reyes (casos favorables) y un total de 40 cartas (casos posibles), $4/40 = 1/10$.

E1. Calcula la probabilidad de sacar figura (sota, caballo o rey) en una baraja española.

E2. Calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 en un dado de 20 caras.

E3. Una bolsa contiene 4 bolas rojas, 5 azules y 1 blanca. Saco una sola bola. ¿Qué probabilidad tengo de que sea roja? ¿Y azul? ¿Y blanca? ¿Cuánto suman las tres probabilidades?

E4. Tienes una baraja española. Inventa algún suceso cuya probabilidad sea $1/4$ y otro con $1/3$.

Apuestas en Juegos de Azar

¿Cómo es una apuesta justa? Si yo apuesto a que sale cara y tú a que sale cruz, tenemos que poner los dos el mismo dinero. Pero si yo apuesto a que sale un 5 en un dado y tú a que no sale, tendrás que poner tú más dinero sobre la mesa que yo, ¿no?

La apuesta, para ser justa, tiene que ser proporcional a la probabilidad. En el ejemplo anterior, mi probabilidad de ganar es $1/6$ y la tuya $5/6$. Así, si yo pongo 100 € lo que tú debes poner se calcula con una regla de 3:

$$\begin{array}{ccc} 1/6 & \longrightarrow & 100\text{€} \\ 5/6 & \longrightarrow & x \end{array}$$

[1] En realidad, para total seguridad, infinitas veces...

y tenemos $x = 500$ €.

En realidad se puede hacer aún más fácil: tu probabilidad de ganar es cinco veces la mía. Decimos que las apuestas están 5 a 1 a tu favor.

E5. Sacamos una carta al azar de una baraja española y yo apuesto a que no es de oros. Si yo pongo sobre la mesa 10 €, ¿cuánto pondrías tú como máximo?

E6. Diseña algún experimento al azar en el que las probabilidades estén 4 a uno.

Experimentos Múltiples

Veamos qué hacer en el caso de varias monedas, varios dados... Para eso necesitamos el concepto de **espacio muestral**: el conjunto de resultados posibles.

En el caso del experimento «tirar un dado», el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En el caso de «lanzar una moneda»: $E = \{\text{Cara}, \text{Cruz}\}$. ¿Qué ocurre si lanzo *dos* monedas?

Q5. Antes de seguir, considera esta propuesta. Tiramos dos monedas. Yo apuesto 15 € a que salen cara y cruz, y tú 10 € a que salen dos caras. ¿Ves la apuesta?

Ahora hay *cuatro* resultados posibles. Llamando $+$ a cara y $-$ a cruz, $\{++, +-, -+, --\}$. Es importante que notes que «$+-$» es un resultado diferente de «$-+$», porque en el primer caso es la primera moneda la que cae de cara.

Cuando el espacio muestral está bien delimitado, los problemas son más fáciles. Ahora si me preguntan cuál es la probabilidad de obtener dos caras diré: hay un solo caso favorable, pero hay 4 casos posibles, así que $1/4$.

E7. En el experimento «lanzar tres monedas», calcula la probabilidad de:

a) Sacar tres caras.
b) Sacar dos caras.
c) Sacar, al menos, una cara.
d) Sacar como máximo una cara.

Q6. Considera un experimento cualquiera y calcula las probabilidades de cada uno de los sucesos del espacio muestral. ¿Cuánto suman todas las probabilidades?

Q7. El juego del río. Es un juego para dos jugadores, cuyos terrenos están separados por un río. Las dos orillas se dividen en casillas numeradas del 2 al 12. Cada jugador dispone de 12 fichas que sitúa como quiere entre ellas. Se tiran por turnos dos dados. Si en la casilla correspondiente tiene el jugador alguna ficha, ésta se salva. Gana el jugador que salva antes todas sus fichas.
¿Cuál es la estrategia óptima?

E8. Tiro dos dados. Calcula la probabilidad de cada uno de los valores que puede salir para la suma de los puntos.

E9. [!] Un trilero de la Gran Vía tiene tres cartas. Una de ellas es roja por los dos lados, otra es negra por los dos lados y la tercera es roja por un lado y negra por el otro. Saca una carta y te la muestra por un solo lado: es roja. Te ofrece la siguiente apuesta: «Por detrás puede ser negra o puede ser roja, con un 50% de probabilidad. Van 110 € míos contra 100 tuyos a que es... roja, por ejemplo.» ¿Qué haces?

Noción de Independencia

Ana decide cada mañana al azar si viene vestida de verde, con una probabilidad de $0'4$, o de rojo, con $0'6$. Juan hace lo mismo. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan hoy los dos de verde?

Depende. Si se pusieran de acuerdo, entonces $0'4$. Si Juan siempre hiciera lo contrario que Ana, 0. Pero, ¿y si Juan decide de manera **independiente** de Ana? Entonces supongamos que les observamos 100 días. De ellos, 40 (aprox.) vendrá Ana vestida de rojo. De esos 40 días, Juan vendrá también de rojo un 40%: en total coincidirán en 16 días. En otros términos, la probabilidad es $0'16$, que es $0'4 \times 0'4$.

Así, si dos sucesos son independientes (ninguno influye en el otro), la probabilidad de que ocurran a la vez es el producto de sus probabilidades.

E10. La probabilidad de que un chico elegido al azar del instituto lleve gafas es de $0'3$, y la de que sea del Rayo es de $0'1$. Suponiendo que sean cosas independientes, ¿cuál es la probabilidad de que el chico lleve gafas y sea del Rayo?

E11. La probabilidad de que hoy llueva es de $0'5$, y la de que haya viento es de $0'4$. Si la probabilidad de que pasen las dos cosas es de $0'3$, ¿se trata de sucesos independientes?

Si la probabilidad de que ocurran A y B es mayor que el producto de las probabilidades, se dice que hay «correlación positiva». Si es menor, negativa. Pero *mucho ojo*: eso no quiere decir que una de las cosas sea la causa de la otra. Observa estos ejemplos:

– Se ha observado que, en todos los colegios, hay correlación positiva entre tener el pie grande y leer bien. ¿A qué crees que se debe?

– También se han dado cuenta los expertos de que hay correlación positiva entre comer con poca sal y tener una enfermedad cardíaca. ¿Podemos deducir que es la comida sin sal la que provoca problemas con el corazón?

Q8. Te damos una lista de pares de eventos. Tienes que decidir si son independientes o no. Si son dependientes, di si la correlación es positiva o negativa. Hay algunos casos más difíciles: localízalos y discútelos.

– Conducir borrach@ y tener un accidente de tráfico.
– Tener cáncer de pulmón y ser fumador/a.
– Ser conservador/a en lo político y ser pobre.
– Sacar buenas notas y ser aficionad@ a la lectura.

Sucesos Independientes

Veamos sucesos que son de seguro independientes. Tiremos una moneda. La probabilidad de que salga cara es $1/2$. Volvamos a tirarla. La probabilidad vuelve a ser de $1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara *las dos veces*? Está claro que el resultado de la primera no tiene ninguna importancia para el resultado de la segunda, así que la probabilidad de que ocurran las dos cosas es el *producto* de las probabilidades: $1/2 \times 1/2 = 1/4$.

E12. Tiro un dado dos veces. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Tres en la primera tirada y seis en la segunda.
b) Seis en la dos tiradas.
c) No me salga seis en ninguna de las dos tiradas.
d) Saque al menos un seis.

Observa el «*al menos*» del apartado d) del ejercicio anterior. Es lo contrario de «no sacar ninguno», que es lo mismo que «no sacar en el primero» y «no sacar en el segundo» y «no sacar en el tercero»...

Imagina ahora que sacas tres cartas y quieres tener la probabilidad de que las tres sean figuras. La probabilidad de que la primera sea figura es $10/40$. Supongamos que sabemos que ha salido ya la primera figura. Ahora el hecho de que salga una segunda es independiente de la primera, *pero* tenemos que tener en cuenta que quedan 9 figuras de 39 cartas: la probabilidad es $9/39$. Por el mismo razonamiento, para la tercera figura la probabilidad es $8/38$. Así que la probabilidad de sacar las tres es:

$$\frac{10}{40} \times \frac{9}{39} \times \frac{8}{38} \approx 0'0121$$

Por tanto, ocurrirá un $1'21\%$ de las veces.

E13. Tomo un mazo de cartas barajado. Calcula la probabilidad de que las cuatro primeras cartas sean de oros. Y, después, la probabilidad de que *ninguna* de las cuatro sea de oros.

E14. Un jugador de baloncesto tiene una tasa de acierto del 75% en tiros libres. Va a tirar un uno más uno. Calcula la probabilidad de que no haga ningún punto, de que haga un punto o de que haga dos puntos.

E15. En una urna hay tres bolas blancas, tres rojas y tres azules. Calcula la probabilidad de que saquemos cinco bolas y ninguna sea roja.

E16. Calcula la probabilidad de obtener N caras seguidas en una moneda normal.

E17. ¿Cuántas veces tengo que tirar una moneda al aire para que la probabilidad de no sacar ninguna cruz sea menor que 10^{-5}?

Lógica y Sucesos

Considera estos dos sucesos: A={sacar en un dado de seis caras un número par} y B={sacar un número menor o igual que 3}. ¿Puede ser que los dos ocurran a la vez? Sí, claro, si sale el $\{2\}$. Lo expresamos así: $A \cap B = \{2\}$, «la intersección de A y B es que salga un 2». Así, la intersección de sucesos es el «y» lógico.

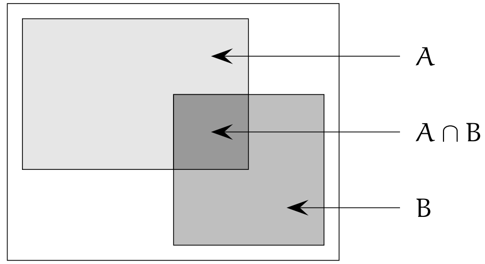
En cambio, podríamos preguntarnos por en qué casos se cumple una condición *o* la otra. Ocurre más a menudo que en el anterior caso: siempre que no salga un 5. Lo expresamos así: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, «la unión de A y B es que salga cualquier número menos un 5». La unión es el «o» lógico.

También podemos pedir que *no* salga A. ¿Qué casos son los oportunos? Como es lógico, $\{4, 5, 6\}$, que son lo que llamaremos $\neg A$, la negación lógica.

Q9. Dos sucesos son independientes. ¿Puede ser nula su intersección?

Sabemos que cuando dos eventos son independientes, la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es el producto. En este caso escribiremos $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. En otros casos, no podemos decirlo de antemano.

¿Qué ocurre con la probabilidad de la unión? Depende. Observa la figura siguiente:



Cada evento viene representado por una región, cuya medida es su probabilidad. Si sumamos las medidas de las regiones A y B tenemos *casi* la medida de la unión $A \cup B$. ¿Por qué digo *casi*? Porque la región de intersección la hemos contado *dos veces*: una vez con A y la otra con B. Si la restamos, tenemos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Por tanto, si dos sucesos sin *incompatibles* (es decir: su intersección es nula), entonces la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Un ejemplo práctico: en una clase hay 20 aprobados en lengua y 15 en mate. ¿Cuántas personas hay que han aprobado *alguna* de las dos? No lo sabemos. Pero si nos dicen que hay 5 personas que han aprobado *las dos* ya podemos deducir: $20 + 15 - 5 = 30$ personas que han aprobado *alguna*. [NOTA: el ejemplo parece que no es de probabilidad, pero en realidad se puede «reformular» para que lo sea. ¿Cómo?]

E18. La probabilidad de que mañana llueva es del $0'5$, y la de que haga viento es del $0'3$. La probabilidad de que llueva *y* haga viento es de $0'1$. ¿Cuál es la probabilidad de que haga un día perfecto de playa?

E19. Tres de cada cuatro estudiantes del instituto saben informática. Un 50% saben manejar Güindous y un 30% saben manejar Linux. ¿Qué tanto por ciento saben manejar los dos sistemas?

E20. Si A={Sacar una carta de oros en una baraja española} y B={Sacar figura}, explica qué es y di la probabilidad de: $A \cap B$, $A \cup B$, $\neg A$, $\neg B$, $\neg(A \cup B)$, $\neg A \cup \neg B$.

E21. [Más difícil] La siguiente expresión se conoce como ley de **de Morgan**: $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$. Discute su significado con un ejemplo y muestra que es cierta sobre un dibujo.