

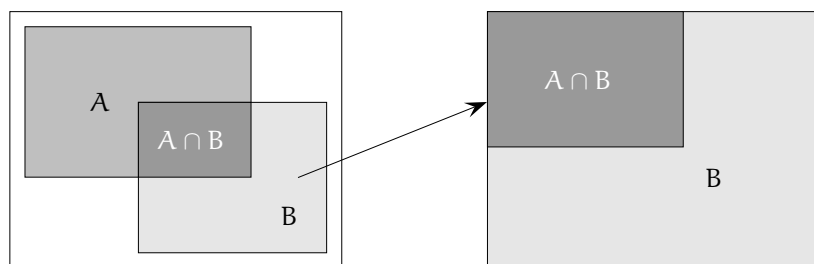
Probabilidad Condicionada

PROBABILIDAD CONDICIONADA

La información que tenemos modifica nuestra asignación de probabilidades. Si te dicen que en Madrid llueve durante 100 días al año, dirías que la probabilidad de que llueva un día cualquiera es $100/365$. Pero si ves que hoy está nublado, estarás dispuesto a aumentar tu estimación.

Sea el experimento de lanzar un dado y sea $A = \{\text{Obtener número par}\}$. ¿Cuál es la probabilidad de A ? Obviamente, $3/6 = 1/2$. Sea $B = \{\text{Obtener un } n^0 \text{ mayor que } 3\}$. Supongamos que sabes que B es cierta, ¿modificas tu estimación para A ?

Escribiremos $p(A|B)$ para dar a entender «la probabilidad de A sabiendo que B es cierta», y se lee «probabilidad de A **condicionada** con B ». Para saber cuánto vale $p(A|B)$, observa el siguiente diagrama:



A la izquierda se muestra el diagrama «previo», mostrando A , B y la intersección de los dos. Después alguien nos dice que B es cierto. Por tanto, tenemos que recalcular nuestras probabilidades. Todo lo que caiga fuera de B es imposible ahora, así que lo tiramos. En el dibujo de la derecha, B ha crecido hasta ocupar todo el espacio disponible: la probabilidad de B ahora es 1. Diremos $p(B) \rightarrow 1$.

¿Cuál es la probabilidad ahora de que salga A ? Sólo los casos compatibles con B son relevantes, es decir, los de $A \cap B$. Diremos $p(A \cap B) \rightarrow p(A|B)$. Y ahora formamos la regla de tres:

$$\begin{array}{lcl} p(B) & \rightarrow & 1 \\ p(A \cap B) & \rightarrow & p(A|B) \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Volvamos al ejemplo del principio de la sección. A era sacar número par: $p(A) = 1/2$. B era sacar número mayor que 3: $p(B) = 1/2$. La intersección de ambos es sacar $\{4, 6\}$, así que $p(A \cap B) = 2/6 = 1/3$. Eso nos dice que

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

¿Es eso cierto? Veámoslo de otra forma. Si sabemos que ha salido un número mayor que tres, es que ha salido $\{4, 5, 6\}$. Ahora, ¿cuál es la probabilidad de, *entre éstos*, obtener un número par? Está claro, $2/3$. ¡Chanán!

? **Q1.** Dos sucesos, A y B , son independientes. ¿Qué puedes decir sobre las probabilidades $p(A|B)$ y $p(B|A)$?

? **Q2.** Las aseguradoras saben que $p(\text{tener un accidente}|\text{ser mujer}) < p(\text{tener un accidente})$. ¿Qué significa esto? ¿Qué consecuencias prácticas tiene?

? **Q3.** ¿Qué relación hay entre $p(\text{Tener Rh-}|\text{Ser del Betis})$ y $p(\text{Tener Rh-})$?

✍ **E1.** La probabilidad de que esté nublado por la mañana es de $0'7$, la probabilidad de que esté nublado por la mañana y llueva por la tarde es de $0'35$. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva por la tarde, sabiendo que por la mañana estaba nublado?

✍ **E2.** Tenemos ocho bolas de billar, numeradas de 1 a 8. Las tres primeras son verdes, la 8 es negra y el resto son rojas. Calcula (e interpreta) la probabilidad de ser par condicionada con sacar rojo, verde o negro.

? **Q4.** [!] En un concurso te ponen ante tres puertas. Sólo una de ellas te lleva a un premio. Cuando has elegido, la presentadora te ofrece un trato. Ella se acerca a una de las puertas que no has elegido y la abre, mostrándote que está vacía. Te dice que puedes reconsiderar tu elección y cambiar a la *otra* puerta que aún no está abierta. ¿Cambiarías o no?

? **Q5.** [!] Tres prisioneros están esperando sentencia: A , B y C . Se sabe que a dos de ellos les van a condenar a muerte. A se acerca al guardia y le pregunta si él morirá, pero no responde. Entonces le pregunta el nombre de algún otro prisionero al que vayan a ejecutar. El guardia dice: « B ». A razona así: «Antes, mi probabilidad de morir era $2/3$, pero ahora es sólo de $1/2$... ¡qué guay!» ¿Estás de acuerdo con él?

PROBABILIDAD TOTAL

Imagina tres equipos de fútbol, de 11 jugadores cada uno: A, B y C. En el A hay tres jugadores rubios, dos castaños y el resto son morenos. En el B hay un jugador rubio y el resto morenos. En el C son todos rubios menos dos, que son castaños. Supongamos que *mezclamos* los tres equipos y elegimos un jugador al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea moreno?

Primer método, el más sencillo: hay en total $6 + 10 + 0 = 16$ jugadores morenos de un total de 33, así que el resultado es $16/33$.

Segundo método, que es más difícil pero más útil a la larga. Llamemos M al suceso «ser moreno». Nos dan las probabilidades condicionadas de cada color *sabiendo* de qué equipo procedemos. Comprueba que $p(M|A) = 6/11$, $p(M|B) = 10/11$ y $p(M|C) = 0$. La probabilidad total de ser moreno será igual a la suma de tres términos:

$$p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C)$$

Si hubiera más equipos, tendríamos que añadir más términos. Considera los tres sucesos: {ser de A}, {ser de B} y {ser de C}. Como no hay más equipos y cada jugador no puede pertenecer más que a uno, diremos que forman un sistema completo de sucesos.

Pero, escribiendo de esta manera la ley de la probabilidad condicionada:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

nos damos cuenta de que la probabilidad de ser «Moreno y de A» es igual a la probabilidad de pertenecer a A multiplicada por la probabilidad de ser moreno *sabiendo* que eres de A. Es decir:

$$p(M \cap A) = p(M|A) \cdot p(A) = 6/11 \cdot 1/3 = 6/33$$

De la misma manera calculamos $p(M \cap B) = 10/11 \cdot 1/3 = 10/33$ y $p(M \cap C) = 0 \cdot 1/3 = 0$. Así,

$$p(M) = p(M \cap A) + p(M \cap B) + p(M \cap C) = 6/33 + 10/33 + 0 = 16/33$$

Debe estar bien porque nos da el mismo resultado... :-). Estas cuentas resultan más sencillas cuando se expresan en forma de árbol:

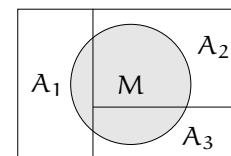
↗	A :	6/11	× 1/3	6/33
→	B :	10/11	× 1/3	10/33
↘	C :	0	× 1/3	0
				16/33

En el segundo método hemos empleado el **teorema de la probabilidad total**, aunque no le hemos enunciado. Un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es un *sistema completo de sucesos* cuando son incompatibles dos a dos y la unión de todos es la totalidad del espacio de sucesos. En otras palabras: cuando cada resultado posible tiene que pertenecer a uno sólo de los A_i . En el ejemplo anterior, los sucesos «pertenecer a A», «pertenecer a B» y «pertenecer a C» lo son.

Ahora enunciemos la primera parte del teorema:

$$p(M) = p(M \cap A_1) + p(M \cap A_2) + \dots + p(M \cap A_n)$$

Esto es obvio a partir del siguiente dibujo. Como entre A_1 , A_2 y A_3 se reparten todo el espacio de sucesos, el «área» de M es igual a la suma de sus intersecciones con cada uno de ellos.



En lugar de escribir con puntos suspensivos usaremos la notación:

$$p(M) = \sum_{i=1}^n p(M \cap A_i)$$

Pero ahora, usando la ecuación para la probabilidad condicionada obtenemos el teorema de la probabilidad total:

$$p(M) = \sum_{i=1}^n p(M|A_i) \cdot p(A_i)$$



Veamos otro ejemplo. En una fábrica hay tres máquinas que producen bombillas. La probabilidad de obtener una defectuosa en cada una de ellas es $1/10$, $1/5$ y $1/20$ respectivamente. La primera máquina produce el 50% de las bombillas, y las otras dos producen un 25% cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla que provenga de esta fábrica sea defectuosa?

Los eventos «provenir de cada una de las máquinas» son el sistema completo de sucesos, y aquí «ser defectuosa» juega el papel de M. La probabilidad de provenir de la primera máquina es $p(A_1) = 1/2$, de la segunda y de la tercera $p(A_2) = 1/4$.

$$p(M) = p(M|A_1) \cdot p(A_1) + p(M|A_2) \cdot p(A_2) + p(M|A_3) \cdot p(A_3) \\ = 1/10 \cdot 1/2 + 1/5 \cdot 1/4 + 1/20 \cdot 1/4 = 9/80$$

Interpreta el resultado: ¿te parece razonable?



E3. En un instituto hay 60 alumnos en 1º de bachillerato y 40 en segundo. Los de primero aprueban en un 70% y los de segundo en un 80%. Elegimos un alumno al azar. ¿Qué probabilidad hay de que apruebe?

TEOREMA DE BAYES

En muchos casos, en lugar de preguntarnos las probabilidades de los *efectos* dadas las *causas*, nos hacen la pregunta al revés: sabiendo el *efecto*, di cuál es la probabilidad de que la *causa* haya sido una determinada. En este caso se dice que calculamos probabilidades *a posteriori*.



Un ejemplo concreto. Hay dos bolsas con bolas de colores. La primera tiene dos bolas rojas y tres negras. La segunda tiene cinco rojas y una negra. Supongamos que hemos elegido una de las dos bolsas sin mirar y hemos extraído una bola negra (*efecto*). ¿Cuál es la probabilidad de que la bolsa elegida fuera la primera (*causa*)?

Llamemos A_1 al suceso «elegir la primera bolsa», y A_2 al «elegir la segunda», R a sacar bola roja y N a sacar bola negra. Nos dan las probabilidades $p(N|A_1) = 3/5$, $p(N|A_2) = 1/6$, $p(R|A_1) = 2/5$, $p(R|A_2) = 5/6$. Además, también sabemos $p(A_1) = p(A_2) = 1/2$, porque nos dicen que elegimos la bolsa sin mirar.

¿Qué nos piden? La probabilidad de haber elegido la primera bolsa *sabiendo* que salió una bola negra. Es decir: $p(A_1|N)$. ¡Un momento! Tenemos $p(N|A_1)$. ¿No son iguales? ¡NO! Piensa un poquito y te darás cuenta...

Observa la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$p(A_1 \cap N) = p(A_1|N) \cdot p(N)$$

Ahora la reescribimos «al revés»:

$$p(N \cap A_1) = p(N|A_1) \cdot p(A_1)$$

Pero $p(A_1 \cap N) = p(N \cap A_1)$, ¿no? Así que:

$$p(A_1|N) \cdot p(N) = p(N|A_1) \cdot p(A_1)$$

y esto es el **teorema de Bayes**, que nos sirve para «dar la vuelta» a la probabilidad condicionada.

La única pega en la fórmula anterior: no tengo $p(N)$. Pero sé hallarlo, con el teorema de la probabilidad total. Usando un árbol:

$$\begin{array}{lcl} \nearrow & A_1 : & 3/5 \times 1/2 = 3/10 \\ N & & \\ \searrow & A_2 : & 1/6 \times 1/2 = 1/12 \\ & & \hline & & 23/60 \end{array}$$

Ya sólo queda despejar del teorema de Bayes:

$$p(A_1|N) = \frac{p(N|A_1) \cdot p(A_1)}{p(N)} = \frac{3/5 \cdot 1/2}{23/60} \approx 0'7826$$

En general, si nos piden $p(A_i|M)$ y tenemos el conjunto de los $p(M|A_i)$, los $p(A_i)$ y además los $\{A_i\}$ son un sistema completo de sucesos, entonces se verifica que:

$$p(A_i|M) = \frac{p(M|A_i) \cdot p(A_i)}{p(M)}$$

Esto se combina con el teorema de la probabilidad total para dar

$$p(A_i|M) = \frac{p(M|A_i) \cdot p(A_i)}{\sum_{i=1}^n p(M|A_i) \cdot p(A_i)}$$



E4. En una ciudad se sabe que hay un caso de tuberculosis por cada 100 habitantes. A un individuo se le pasó un test que, cuando el individuo es tuberculoso, da positivo en un 97% de los casos. Cuando el individuo no es tuberculoso, sólo hay un 0'1% de positivos. El test ha dado positivo en nuestro caso. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo sea tuberculoso?



E5. Cuando Jaimito aprueba es o bien porque ha estudiado o bien porque ha copiado. Cuando copia, las probabilidades de que apruebe son del 60%, mientras que cuando estudia sólo son del 40%. Cuando ni estudia ni copia, es seguro que suspende. Copia el 50% de las veces y estudia el 25%. Hoy ha aprobado. ¿Qué probabilidades hay de que haya estudiado?