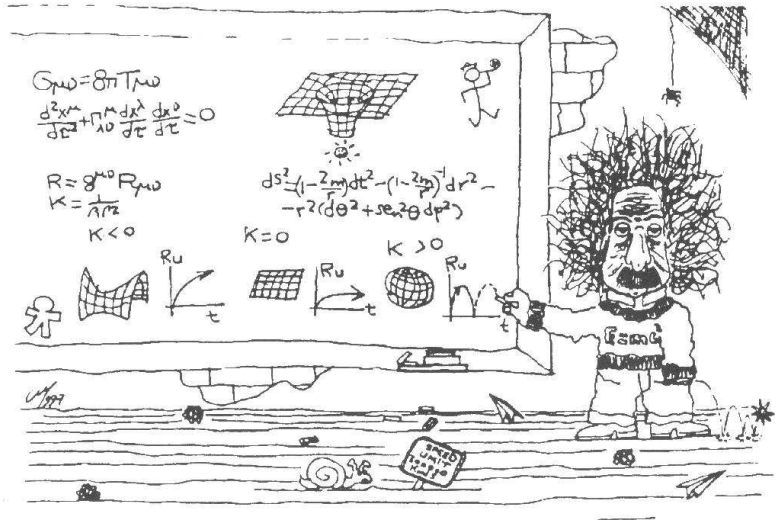
Teoría General de la Relatividad.



Autores: Juan Antonio Martínez Rojas (*Cosmología*), Daniel Omar Romero Barroso (*Ilustraciones*), Javier Rodríguez Laguna (*Teoría General de la Relatividad*), Silvia N. Santalla Arribas (*Edición y Revisión Técnica*).

Primera Edición: Asociación Física Universidad, Universidad Complutense de Madrid (1997).

Segunda Edición: Proyecto Didáctico Euler[1] (2003).

Este libro es Patrimonio Cultural de la Humanidad, pudiendo por tanto ser copiado, transmitido, almacenado y/o utilizado a través de medios mecánicos, fotográficos, electrónicos, por amanuense o cualesquiera otros, sin la autorización expresa de los autores.

Asimismo, este libro ha sido realizado sin ningún ánimo de lucro, siendo pues facilitado a condición de no ser redistribuido por medio de alquiler, venta, préstamo, trueque y/o cualquier otro que suponga el cobro de un precio, sin la autorización expresa de los autores.

[1] Disponible libremente en `http://olmo.cnice.mecd.es/~jrol0022`

Ubi materia, ibi geometria
Johannes Kepler

0. Introducción.

Allá en el principio de los tiempos, el gran físico experimental Adán descubrió la fuerza de la gravedad cuando ésta le atrajo hacia la gran física teórica Eva, que a su vez expuso por primera vez las más conspicuas propiedades de esta interacción:

a) Es siempre atractiva, parece como si la Tierra atrajese a los cuerpos.
b) Todos los cuerpos caen hacia abajo. Claro que, al tomar como definición de «*abajo*» la dirección hacia la que caen los cuerpos, este párrafo es algo autoreferencial...
c) Parece que todos los cuerpos caen, despreciando efectos de rozamiento, con la misma aceleración.

El punto c), conocido también como «**Universalidad de la Caída Libre (UCL)**», fue objeto de enconada polémica. En una discusión que hoy es un clásico a pesar de no haber existido, Aristóteles discute del particular con Galileo [2] llegando a esta conclusión: la masa que pondrá en el futuro Isaac[2] en su segunda ecuación de la dinámica es la misma que aparecerá en su ecuación para la gravitación. Otros puntos menores, como que la fuerza caiga con el cuadrado de la distancia, se explican de forma sencilla y elegante con el teorema de Carl Friedrich[2] (Gauss, obviamente).

Como todos los cuerpos caen con la misma aceleración, un campo gravitatorio es «*localmente*» indistinguible de un sistema de referencia acelerado. Vamos a ver: si estás en un ascensor encerrado y notas una fuerza hacia el suelo... ¿será que estás subiendo acelerado en medio del espacio? ¿o estarás en un campo gravitatorio? Esa equivalencia se llama... «**Principio de Equivalencia (PE)**».

Por supuesto que se pueden distinguir ambas situaciones, pero no localmente. Dos cuerpos dejados caer libremente seguirán trayectorias en general curvas, pero paralelas «*localmente*». La primera corrección viene dada por las **fuerzas de marea**: pensad en dos partículas cayendo hacia la Tierra: como caen según radiales, se están acercando entre sí. Es un residuo, un efecto a gran escala de la fuerza de la gravedad: nuestros pies son atraídos con más

[2] Nos tomamos la libertad de llamarle por su nombre de pila dada la confianza que el autor del presente texto tiene con él. *(N. del A.)*

fuerza que nuestra cabeza.

Pero, si son equivalentes un campo gravitatorio y un sistema de referencia acelerado, podemos siempre deshacer un campo poniéndonos en el Sistema de Referencia (S.R.) apropiado. ¿Cuál será éste? Pues un SR en caída libre, claro. En caída libre, localmente, todas las partículas siguen trayectorias rectas. Localmente quiere decir que no podemos mirar muy lejos en el espacio o en el tiempo, a riesgo de notar las fuerzas de marea.

Hasta aquí todo correcto, es la teoría newtoniana de la gravitación, pero he aquí que Albert[2] hace esta pregunta: si desaparece α-Centauri dejaremos de verla sólo dentro de 4 años, pero... ¿Cuándo dejaremos de notar sus efectos gravitatorios? La teoría de Newton no dice nada concreto pero parece sugerir (fíjate tú) que... debieran dejarse de notar inmediatamente... contra la teoría especial de la relatividad. Colapsa la Bolsa, dimiten en masa los ministros: la Vieja Teoría de Newton es... «*incorrecta*»[3].

Einstein mira atentamente el PE y decide que tiene consecuencias más profundas de las que aparecen a primera vista. Si dibujamos un diagrama de Minkowski [4] (espacio-tiempo) del movimiento planetario nos sugiere que no es que sean trayectorias curvas en un espacio recto (y a cuadritos), sino líneas «*rectas*» en un... *espacio curvo*. Entendámonos. Supongamos que el espacio fuera curvo (como si fuéramos seres bidimensionales y viviéramos sobre una esfera, ¿vale?). Entonces, ¿qué serían las líneas rectas? Pues está claro: las líneas de mínima distancia entre dos puntos, las **geodésicas** (que sobre una esfera son arcos de círculo máximo).

Una vez ha decidido que la gravedad *puede* formularse así se pone como programa de acción:

a) El espacio, al ser curvo, hace que las partículas se muevan no por rectas sino por geodésicas.

b) La materia (y la energía, por la Relatividad Especial) convierte el espacio plano (recto y a cuadritos) en un espacio curvo.

Tenemos, como es lógico, interacción entre los apartados a) y b) del programa, y el lío padre matemático armado. Como el pobrecito Albert no es un genio de las matemáticas (sino de la física... de acuerdo, yo tampoco sé dónde está la diferencia) habla con su mujer Maleva Marič y con su amigo de

[3] El cuadro que más tiempo ha estado colgado al revés es «*El barco*», de Matisse, que duró 47 días así en el *Museum of Modern Art* de Nueva York. Durante ese tiempo pasaron por delante unas 110.000 personas. *El Libro Guiness de los Records, 1971.*

[4] No minkowski de nada. *(N. del T.)*

la escuela Marcel Grossmann y se ponen manos a la obra. Le van a enseñar las reglas básicas de navegación en espacio-tiempos curvos.

Ahí vamos...

1. Taquigrafía: Tensores.

Muchas veces nos encontramos con expresiones larguísimas que resultan tener una gran simetría, así que parece que estemos malgastando papel, tinta y entendimiento en esas ecuaciones, cuando podríamos inventar una nueva notación que fuese más compacta (y más inteligible) que mostrase a primera vista las simetrías.

1.1. Formas, Vectores y Producto Escalar.

Comenzaremos con la definición de **forma**: dado un espacio vectorial (tomaremos $\mathbb{R}^3$ para los ejemplos) una forma será una «máquina lineal» que a cada vector asocia un *número*.

En nuestro $\mathbb{R}^3$ vulgar, un vector y una forma podrían ser, respectivamente,

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w = (0, 1, 2)$$

de tal manera que el número que obtenemos es:

$$\langle w, v \rangle = (0, 1, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 8$$

Ese número es, obviamente, el **producto escalar**.

El teorema de *Riesz-Frèchet* dice que, en espacios de dimensión finita el espacio de las formas (también llamado **espacio dual**) es isomorfo al espacio original. Eso quiere decir que a cada vector le podemos asignar una forma. Una manera de hacer esto es, simplemente, «tumbando» el vector (y en este caso tenemos el producto escalar del espacio euclídeo usual), ¡pero *no es la única*!

La forma más general será aplicarle al vector una matriz g y luego «tumbarlo». En este caso podemos escribir $\mathtt{forma} = (g\, v\mathtt{ector})^t$. A la matriz g la llamaremos **métrica** y, como domina el producto escalar, domina longitudes y ángulos, es decir, buena parte de la geometría (por eso la «g»). Si queréis practicar, escribid una matriz g y probad a calcular con ella la longitud del vector e_1 o el ángulo que forma con el e_2. La métrica euclídea es, obviamente,

la matriz identidad... y en cuanto a la utilidad de otras métricas nos reservamos para contarla después.

Una forma de visualizar geométricamente la diferencia entre vectores y formas es ésta: una forma es un conjunto infinito de planos paralelos, de tal manera que cuando un vector (usual, flechita) aparece en el espacio, tiene que «taladrar» algunos de los planos para abrirse camino. Si por cada vez que atraviesa un plano suena un «bong», el número de éstos será el producto escalar de la forma por el vector (ver fig. 1).

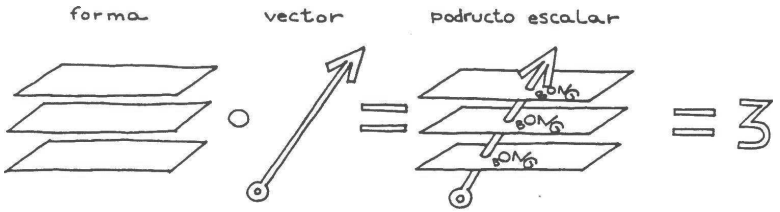


FIGURA 1. Forma, vector y producto escalar.

Una métrica es una regla para, dado un vector, obtener una forma (unos planos paralelos...). Dejamos al lector/a completar la analogía.

1.2. Notación Tensorial.

Introducimos ahora la llamada **notación tensorial**. Los *vectores* se denotan con índices **contravariantes** (que se escriben como superíndices) y las *formas* con índices **covariantes** (que van como subíndices). Además tenemos el *convenio de Einstein*, según el cual se suma sobre cada índice repetido que se encuentre. Unos ejemplos:

El vector v lo escribimos como v^μ, y la forma w como w_μ. Si ahora los escribimos juntos, $v^\mu\ w_\mu$, como el índice μ se repite tenemos que sumar sobre él, así que eso es igual a $v^1w_1 + v^2w_2 + v^3w_3$. Fácil hasta ahora, ¿no?

Pues ahora introducimos la *notación tensorial* para la métrica. Como ésta ha de servir para «convertir» un vector en una forma deberá «bajar» el índice del vector, y lo representamos así: $g_{\mu\nu}\ v^\nu \equiv v_\mu$ y de esta manera podemos calcular el producto escalar de un vector consigo mismo: $\|v\|^2 \equiv v^\mu v_\mu = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ (nótese la *doble suma*, en μ y en ν). Y si tienes dos vectores v^μ y u^ν puedes calcular también el ángulo que forman como

$$\cos(\alpha) = \frac{g_{\mu\nu}v^\mu u^\nu}{\|u\|\|v\|}$$

¿Hay manera de convertir las formas en vectores? Claro, «invirtiendo» la métrica. Si $w = (g\ v)^t$, entonces

$$w^t = g\ v \longrightarrow g^{-1}w^t = v$$

que en notación tensorial se escribe como $v^\mu = g^{\mu\nu}w_\nu$, siempre que la g con los índices arriba sea la *inversa* de la métrica como matriz.

No es difícil comprobar que la condición de que $g^{\mu\nu}$ sea la inversa de $g_{\mu\nu}$ se puede escribir como

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

donde $\delta^\mu{}_\nu$ es la «*delta de Kronecker*», que vale 1 cuando $\mu = \nu$ y cero en cualquier otro caso. ¿Por qué? Bueno, no hay más que recordar qué es el producto de matrices para ver que «eso» es equivalente a $g\ g^{-1} = 1$. Así ya tenemos la manera de subir y bajar índices y podemos dedicarnos a hacer gimnasia con ellos (en realidad era por eso la «g»...)

1.3. Transformaciones de la Métrica.

Cada métrica tiene asociado un conjunto de transformaciones que la conservan. Si T es una de éstas, entonces para cualquier par de vectores a, b, $\langle Ta, Tb\rangle = \langle a, b\rangle$. Por ejemplo, la métrica euclídea tiene como matrices T las rotaciones. Y, adelantando acontecimientos, la métrica de Minkowski tiene a las transformaciones de Lorentz (que serán como «*rotaciones generalizadas*»).

Una transformación lineal con la matriz T que nos transforme el vector v en el $\hat{v}$ se escribirá como:

$$\begin{pmatrix}\hat{v}^1\\ \hat{v}^2\\ \hat{v}^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3\\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3\\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix}$$

y en notación tensorial lo escribimos como

$$\hat{v}^\mu = T^\mu{}_\nu v^\nu$$

con un índice arriba y otro abajo para que no suba ni baje índices (el índice ν está «matado–sumado» a la derecha y el μ queda libre).

Se dice que T es una simetría de la métrica si el producto escalar de dos vectores transformados es el mismo que el de los vectores antiguos sin tranformar, así que:

$$\mathsf{T}^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}\mathsf{T}^{\lambda}{}_{\rho}w^{\rho}g_{\mu\lambda} = v^{\sigma}w^{\tau}g_{\sigma\tau}$$

es la ecuación que te da las T dada la métrica (repetimos: si la métrica es la euclídea usual, las T son las rotaciones; pero en relatividad especial, la métrica (de Minkowski) es conservada por unas T que son las transformaciones de Lorentz).

Como v y w son arbitrarios,

$$g_{\mu\nu} = g_{\sigma\tau}\mathsf{T}^{\sigma}{}_{\mu}\mathsf{T}^{\tau}{}_{\nu}$$

¿Cómo definiremos la transformación de las formas? Pues, si T es una simetría y el vector v se transforma con la matriz T, la forma w se tiene que transformar con T^{-1} *para que el producto escalar sea invariante bajo la transformación*. Se ve, ¿no? ¡Ah!, pero como actúa sobre *formas*, será la matriz *transpuesta* y no la original (para que actúe a la izquierda y no a la derecha):

$$v^{a}w_{a} = v^{c}\mathsf{T}^{a}{}_{c}w_{d}(\mathsf{T}^{-1})^{d}{}_{a} = \mathsf{T}^{a}{}_{c}(\mathsf{T}^{-1})^{d}{}_{a}v^{c}w_{d} = \delta^{d}{}_{c}v^{c}w_{d} = v^{c}w_{c}$$

(ya que $c = d$).

Pero, en la práctica, en el espacio euclídeo la transpuesta de la inversa de una matriz de rotación es... ella misma. Por eso en la geometría euclídea no hacía falta toda esta parafernalia de distinción entre vectores y formas, etc.

1.4. Tensores.

Un **tensor** general será un monstruo con muchos índices, unos arriba y otros abajo, p.ej.: $\mathsf{R}^{ab}{}_{cde}$. De este tensor se dice que tiene rango (2,3), pues tiene dos índices arriba y tres abajo. Podemos «*adosarle*» dos formas y tres vectores, sumando en índices repetidos (como siempre), y obtendremos un número: $\mathsf{R}^{ab}{}_{cde}v_{a}w_{b}x^{c}y^{d}z^{e}$ será siempre un número, todos los índices están matados (*ver fig. 2*).

Pero hay una diferencia esencial entre un número y un escalar. Ante el grupo de las transformaciones T exigiremos que ese número se esté quietecito, es decir, que sea *escalar*. Pero los vectores y las formas varían sus componentes al aplicar las T, así que será necesario que varíen también las componentes del tensor para que «*en total*» se cancelen todas las T y como resultado quede un

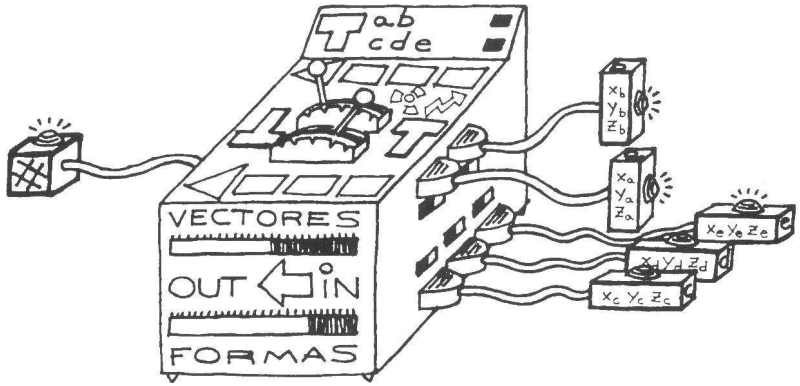


Figura 2. Tensor como máquina de slots, monstruo de muchos índices.

escalar. Como los vectores van con la T y las formas con la T^{-1} es obvio que la R tendrá que ir con una T^{-1} por cada vector que admite y con una T por cada forma que admite (para que se cancelen, insisto). Pero cada forma que admite va asociada a un índice contravariante, y cada vector con uno covariante, así queda:

$$\hat{\mathsf{R}}^{ab}{}_{cde} = \mathsf{R}^{fg}{}_{hij}\mathsf{T}^{a}{}_{f}\mathsf{T}^{b}{}_{g}(\mathsf{T}^{-1})^{h}{}_{c}(\mathsf{T}^{-1})^{i}{}_{d}(\mathsf{T}^{-1})^{j}{}_{e}$$

Y entonces (y sólo entonces) será un tensor. Nótese que tiene una regla de transformación bien definida, dadas las simetrías de la métrica, así que una expresión en la que todos los objetos que aparezcan se comporten como tensores (ante un determinado grupo de transformaciones T) es *inmediatamente* una ecuación **invariante** bajo ese grupo de transformaciones. La invariancia bajo rotaciones o Lorentz se ven así inmediatamente.

Un par de reglas prácticas al hacer gimnasia de índices:

a) Nunca repitas índices si no vas a hacer una suma en ellos.

b) Un índice sobre el que has sumado se llama «*mudo*», y puedes cambiarlo por cualquier otro. P.ej.:$a^{\mu}b_{\mu} = a^{\lambda}b_{\lambda}$.

c) Vigila que, en una ecuación tensorial, los índices no mudos aparezcan en ambos lados y en el mismo sitio (arriba o abajo).

Otro dato importante. Tenemos una función escalar ϕ. ¿Qué tipo de objeto es $\nabla\phi$? ¿Es un vector? Voy a dar un argumento intuitivo para probar que no: la variación de ϕ según una determinada dirección $d_{v}\phi$ es un escalar, es independiente del sistema de referencia (mientras v varíe apropiadamente),

pero $d_v\phi = \nabla\phi\ dv$, así que es un producto escalar y, por tanto, $\nabla\phi$ debe de ser una *forma*. ¿Cómo probarlo? Fácil, usa la regla de la cadena para hallar cómo se transforma $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ sabiendo que (x, y, z) se tranforman como un vector. Obtendrás la matriz inversa si tratas a $\nabla\phi$ como una forma y la transpuesta de la inversa si te empeñas en tratarlo como un vector.

NOTA: como un índice derivado es un índice covariante se suele escribir $\phi_{,1} = \phi_{,x} \equiv \partial\phi/\partial x$

Y para que practiques, un par de ejercicios:

1) El tensor alternado de Levi-Civita ϵ^{abc} es uno que vale $+1$ cuando (abc) es una permutación par de la (123), -1 cuando es una permutación impar y 0 en caso de que se repita algún índice. A ver si eres capaz de usarlo para, dados unos vectores, hallar el determinante de la matriz que generan.

2) ¿Cómo expresarías divergencias y rotacionales en notación tensorial? Una ayuda notacional: la derivada con respecto a x^μ de A^α la denotaremos como $A^\alpha{}_{,\mu}$ y es un tensor con todas las de la ley.

2. Geometría Diferencial.

2.1. El V Postulado y los Espacios Curvos.

Nuestra imagen intuitiva de un espacio curvo será la de una superficie en el espacio, p.ej., una esfera. Pero hay que hacer una aclaración: Tomaremos el punto de vista de quien vive *dentro* de la superficie, es decir, una geometría **intrínseca**. Por ejemplo, describiremos la superficie de una esfera como lo harían unas «*chinches*» que fueran bidimensionales y vivieran sobre su superficie. Así, un cilindro o un cono no son curvos, porque se pueden desarrollar sobre un plano.

Imaginad ahora que sois estos seres bidimensionales. La idea es de un un maestro inglés del siglo pasado llamado Abbott, y la expuso en su «*Planilandia*». En ella el protagonista, llamado «*Cuadrado A*», tenía problemas con la justicia por dudar de la Geometría Euclídea que se tomaba por dogma religioso en su tiempo. Euclides había establecido cinco postulados sobre la geometría en su mundo:

I: Dados dos puntos cualesquiera, hay una recta que los une.
II: Toda recta se puede prolongar indefinidamente.
III: Se puede trazar una circunferencia con cualquier centro y radio.

IV: Todos los ángulos rectos son iguales.

V: Dada una recta y un punto exterior a ella, hay sólo una recta que pase por el punto y sea paralela a la dada (*ver fig. 3*).

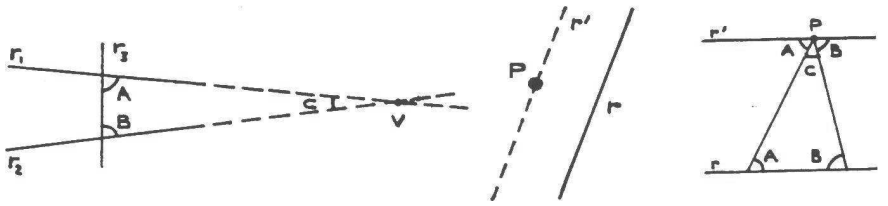


FIGURA 3. Tres maneras de ver el V postulado de Euclides. En el gráfico de la izquierda vemos que si una recta corta a otras dos de tal manera que los ángulos internos no suman dos rectos, entonces éstas se cortarán si las prolongamos por el lado en el que los ángulos sumaban menos de dos rectos. En el centro se ve ilustrada la afirmación del texto. A la derecha se comprueba que esto es equivalente a que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.

Pero Cuadrado A comprobó que el V postulado era **falso** en su mundo. Podía vivir sobre una esfera –donde NO hay paralelas– o sobre una pseudoesfera (una superficie con forma de trompeta) –donde hay muchas. La historia de las geometrías no-euclídeas tiene interés por mérito propio. El V postulado había dado trabajo a mucha gente: era tan «raro» que intentaban demostrar que era un teorema, es decir, que se deducía de los otros cuatro, sin éxito. Así que Lobachevski y Bolyai estudiaron (mediados del XIX) geometrías «*sin el V postulado*», totalmente coherentes, sólo que *distintas* a la que tenemos por intuitiva (*ver fig. 4*).

Un ejemplo: ¿Se os ocurre algún triángulo en el que la suma de los tres ángulos sea tres rectos?

Fue Bernhard Riemann, en la disertación que dio como parte del examen de «oposiciones» para ser profesor de universidad, el que estableció el aparato matemático para estudiar cualquier espacio curvo: la geometría diferencial.

2.2. Variedades.

Definimos una **variedad** como un espacio en el que existe un sistema de coordenadas y localmente es como $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una superficie, pero nótese que la vemos como si viviéramos DENTRO de ella y no hacemos hipótesis sobre la posibilidad de que sea parte de un espacio superior (como la superficie de una

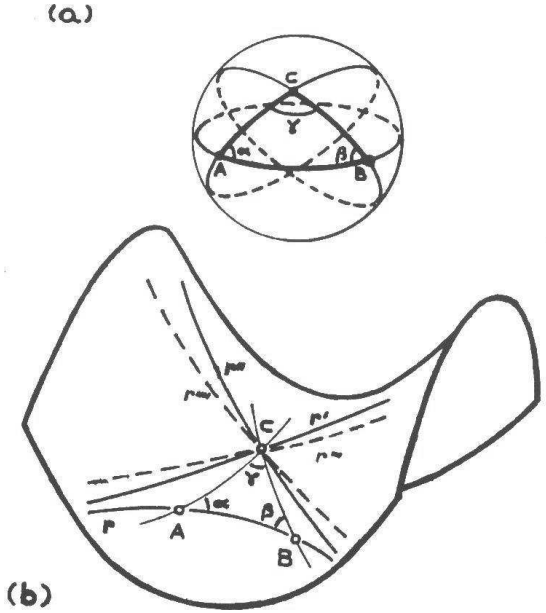


FIGURA 4. Geometrías no euclídeas. Sobre la superficie de una esfera los ángulos de un triángulo suman más de dos rectos, no existiendo además ninguna paralela exterior a una recta (a). En cambio, en la superficie de un paraboloide hiperbólico podemos trazar infinitas «rectas» que, pasando por un punto exterior a una dada, no llegan nunca a cortarla (b). En este caso puede comprobarse que la suma de los ángulos es menor que dos rectos.

esfera es parte de $\mathbb{R}^3$). En cada punto de esa variedad tendremos un **espacio tangente**, que es plano, y es donde vivirán y jugarán nuestros tensores (*ver fig. 5*).

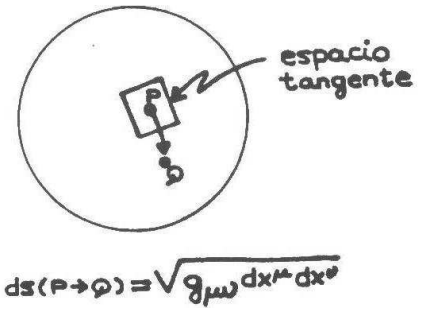


FIGURA 5. Espacio tangente y distancia entre dos puntos.

Al mogollón de espacios tangentes que nos salen se le suele llamar **fibrado tangente**, y su envolvente es la variedad original. Lógico, ¿no? ¿Quiénes son los vectores que viven en los espacios tangentes? Pues son los vectores *tangentes* a las curvas que pasan por la variedad. Así que si, estando en el punto P, quieres ir al punto Q *que está cerca*, sólo tienes que aplicarte sobre ti mism@ un vector de tu espacio tangente. Ahora introducimos aquí la métrica. Sea dx^μ el vectorcito que te tienes que aplicar para llegar a Q. ¿A qué distancia está Q de nosotros? Bueno... introducimos un tensor métrico en CADA espacio tangente, de tal manera que dicha distancia es

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}(P)dx^\mu dx^\nu}$$

Integrando esa expresión podemos hallar distancias entre puntos separados no ya infinitesimalmente, sino a distancias finitas. Sea C una curva que vaya de P a Q con parámetro λ:

$$d_C(P,Q) = \int_C \sqrt{g_{\mu\nu}(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda$$

Un ejemplo concreto: la esfera de radio 1, parametrizada por θ y ϕ de tal manera que

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta)\cos(\phi) \\ y &= \sin(\theta)\sin(\phi) \\ z &= \cos(\phi) \end{aligned}$$

así que la distancia entre dos puntos es la heredada del $\mathbb{R}^3$ que la origina:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = &\left(\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)d\phi\right)^2 + \\ &+\left(\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)d\phi\right)^2 + \\ &+\left(\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)d\phi\right)^2 \end{aligned}$$

y eso equivale a

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

La métrica es, por tanto, si $x^1 = \theta$ y $x^2 = \phi$: $g_{11} = 1$, $g_{22} = \sin^2(\theta)$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Así que la distancia entre los puntos $P = (\theta_0, \phi_0)$ y $Q = (\theta_1, \phi_1)$ a

lo largo de una curva C dada: $\theta(\lambda), \phi(\lambda)$ (tal que en $\lambda = 0$ estemos en P y en $\lambda = 1$ estemos en Q) es

$$d_C(P,Q) = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^2 + sen^2(\theta(\lambda)) \left(\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right)^2}$$

Dados dos puntos (sobre la esfera o en otra variedad) calculad cuál es el camino de *mínima distancia*, también llamado **geodésica**. ¿Cómo? Pues aplicad las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}$$

¿Cuáles son las geodésicas en el plano? ¿Y sobre la esfera?

Otro ejercicio: ¿Bajo qué ángulo se cortan dos curvas en una variedad? Aplicad el resultado al problema clásico de la «*loxodrómica*»: hallar la ecuación de la curva en la esfera que corta siempre a los meridianos bajo un ángulo constante. Es la curva que seguían los barcos en el siglo XVI, ya que la geodésica era más difícil de seguir y ésta se parecía lo suficiente en la cercanía del Ecuador.

NOTA: la métrica no tiene por qué ser simétrica en principio, pero siempre se puede simetrizar sin cambiar la geometría del problema:

$$g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 = \frac{g_{12}+g_{21}}{2}dx^1dx^2 + \frac{g_{12}+g_{21}}{2}dx^2dx^1$$

así que siempre la supondremos simétrica.

2.3. Conexión y Derivada Covariante.

Así tenemos resuelto el problema de, si nos dan una geometría del espacio-tiempo, hallar las geodésicas, que dijimos que eran las trayectorias que siguen las partículas. Ahora nos queda el otro problema, la otra mitad de la teoría: ¿Cuál es la métrica del espacio-tiempo?

Para obtenerla atacaremos primero el problema de la **conexión** o **transporte paralelo**: en todas las teorías físicas las ecuaciones de campo implican derivadas de éstos respecto a la posición, p.ej. la ley de Gauss: $\nabla E = 4\pi\rho$. El problema es que la definición de derivada implica comparación del valor del campo en un punto con el valor en el punto vecino. Pero los campos viven en realidad en el espacio tangente, y el valor del campo en P vive en un espacio

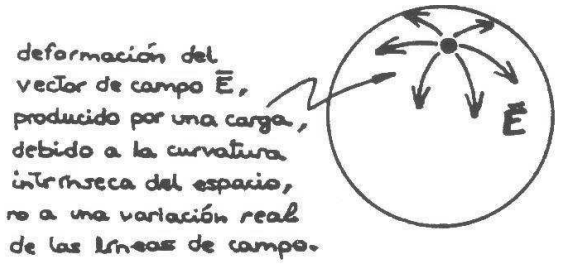


FIGURA 6. La curvatura del espacio deforma las líneas de campo.

distinto que el valor del campo en Q. (*ver fig. 6*). ¿Cómo se pueden comparar ambos valores?

El truco consiste en inventar un «*transporte paralelo*», que lleve el vector en P *paralelamente a sí mismo* hasta Q. Allí lo comparamos con el valor que toma el campo en Q, restamos, dividimos entre la distancia que ha recorrido, tomamos el límite cuando $Q \to P$ y ya está, tendremos una derivada que «*se salta la geometría*». La llamaremos **derivada covariante**.

Formalizamos. Sean dos puntos P y Q vecinos, separados por un vectorcito dx^β, que, *si bien vive en el espacio tangente*, también nos puede servir para movernos de un punto a otro que esté infinitesimalmente próximo. Y sea también un vector que vive en el espacio tangente de P: v^α. Definimos los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ para que el vector v^α de P trasladado a Q sea

$$v^\mu(P \to Q) \equiv v^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}v^\alpha(P)dx^\beta$$

Podemos pensar en Γ como en un «objeto» que, si le das el vectorcito del traslado (que vivía en el espacio tangente pero sirve para moverse mientras sea localmente) te da una matriz que, al enchufarla el vector que quieres mover, te da «*menos*» el cambio que sufre dicho vector. Obviamente, ese «*menos*» es por conveniencia posterior.

Aún así hay muchas posibilidades para Γ dada una métrica. Para fijar una imponemos dos condiciones:

a) La conexión ha de preservar el producto escalar: dos vectores que forman un ángulo α en el espacio tangente a P, también formarán ese ángulo α al ser trasladados a Q.

b) La conexión es simétrica en los dos índices inferiores: es lo mismo trasladar el vector e_1 a lo largo de e_2 que trasladar el e_2 a lo largo de e_1.

Ahora tenemos

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\nu\beta,\alpha} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

que es la llamada «*conexión métrica*». No es la única, pero es la mejor, y es la que impondremos. Después probaremos esta fórmula.

NOTA: $g_{\nu\beta,\alpha}$ quiere decir $\partial g_{\nu\beta}/\partial x^{\alpha}$.

OTRA NOTA: Hay una construcción «*pictórica*» para ver la conexión métrica, llamada **escalera de Schild**. Consiste en dibujar el punto P, el punto Q y el vectorcito v pinchado en P. Luego unes el extremo del vectorcito con el punto Q por una geodésica. Hallas el punto medio de esta línea y ahora trazas una geodésica desde P hasta ese punto, prolongándolo después hasta el doble de su longitud. El punto al que llegues es el extremo del vectorcito trasladado a Q (*ver fig. 7*).

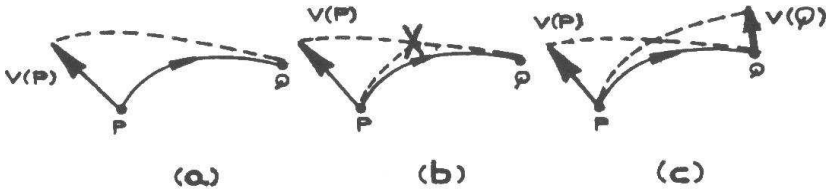


FIGURA 7. Escalera de Schild. Se desea trasladar un vector v de P hasta Q. La línea curva que une estos dos puntos es una geodésica. Unimos mediante otra geodésica el vértice de v con el punto Q, y después trazamos la geodésica desde P hasta el punto medio de dicha curva. Prolongamos este tramo en el doble de su longitud y tenemos el punto extremo de v trasladado a Q.

Notad que es el mismo procedimiento por el que trazan paralelas a una recta cuando sólo tienes una regla marcada. El procedimiento se puede seguir indefinidamente, y cuando se dibuja aparece la imagen de una escala, de ahí su nombre.

Ahora damos la definición formal de derivada covariante:

$$\frac{Dv(p)^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \equiv v(P)^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv \lim_{Q\to P} \frac{(v(Q)^{\alpha} - v(P \to Q)^{\alpha})}{d(P,Q)}$$

y operando queda

$$v(P)^{\alpha}{}_{;\beta} \equiv v(P)^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} v(P)^{\mu}$$

Y podemos ampliar la noción a formas e incluso a tensores con sólo pedir que «*conmute*» con la contracción (suma sobre índices repetidos) y que cumpla

la regla de Leibniz del producto, ya que un tensor T^{ab} se transforma como el producto de dos vectores $v^a w^b$. Se llega a:

$$T^{\alpha\beta}{}_{\gamma;\mu} \equiv T^{\alpha\beta}{}_{\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} T^{\sigma\beta}{}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\mu} T^{\alpha\sigma}{}_{\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu} T^{\alpha\beta}{}_{\sigma}$$

Se ve la regla de formación, ¿no? Tantos sumandos «+» como índices contravariantes y tantos «−» como covariantes.

Ahora que tenemos la derivada covariante a punto podemos usarla para probar la forma de los símbolos de Christoffel: al exigir que se conservasen los ángulos estábamos pidiendo que, a lo largo de una curva,

$$\frac{D(g_{ab} v^a w^b)}{du} = 0 = \frac{Dg_{ab}}{du} v^a w^b + g_{ab} \frac{Dv^a}{du} w^b + g_{ab} v^a \frac{Dw^b}{du}$$

como los vectores v y w están trasladados paralelamente, su derivada covariante es cero, y nos queda $g_{ab;c} v^a w^b = 0$ para todo v, w, así que $g_{ab;c} = 0$. Pero como tenemos la expresión para la derivada covariante para tensores: $g_{ab,c} = \Gamma^{d}_{ac} g_{db} + \Gamma^{d}_{bc} g_{ad}$. Escribimos ahora la misma ecuación reetiquetando los índices, pasando de (abc) a (bca) y a (cab). Luego sumamos las dos primeras ecuaciones y restamos la tercera, obteniendo $2\Gamma^{d}_{ca} g_{db} = g_{ab,c} + g_{bc,a} - g_{ca,b}$. De aquí despejamos Γ y obtenemos la expresión pedida.

NOTA: Γ, pese a ser un objeto con índices, no es un tensor: se transforma de manera no-homogénea, es decir, puede ser cero ahora y, al aplicar una transformación de esas que dejaban invariante la métrica, ser ya no-cero. Tendrá su explicación física en su momento.

Otra manera de ver las geodésicas es decir que son curvas según las cuales el vector tangente se transporta paralelamente a sí mismo. Si $x^{\mu}(s)$ es la curva, el vector tangente es dx^{μ}/ds, y cuando lo transportas paralelamente a sí mismo un poquito a lo largo de la propia curva su cambio será

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

que es la misma ecuación que obteníamos con Euler-Lagrange.

2.4. La Curvatura del Espacio.

Y llegamos ya al concepto de **curvatura**, que estábamos esperando ansios@s. Supongamos un vector que parte de un punto dado y lo vamos trasladando paralelamente a sí mismo a lo largo de una curva... que termina por

volver al punto de partida. Es bien posible que, tras tan emocionante viaje, el vectorcito se sienta algo perturbado y vuelva a casa cambiado. A tod@s nos afectan los viajes, ¿no? Eso es la curvatura: una variedad se dice plana si para todo camino cerrado los vectorcitos vuelven a casa sin notar el cambio, y es curvo en cualquier otro caso.

Definimos el **tensor de Riemann** como aquel que, si le das dos vectorcitos pequeñitos (de esos que viven en el espacio tangente pero te sirven para trasladarte en «cercanías») te da una matriz que, al enchufarle un vector, te da su cambio al pasearle por un circuito cerrado que es un paralelogramo que tiene a los dos vectorcitos del principio por lados. Si los dos vectorcitos son $\mathtt{a}$ y $\mathtt{b}$, será el traslado por el paralelogramo $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $-\mathtt{a}$, $-\mathtt{b}$. ¿De acuerdo? (*ver fig. 8*)

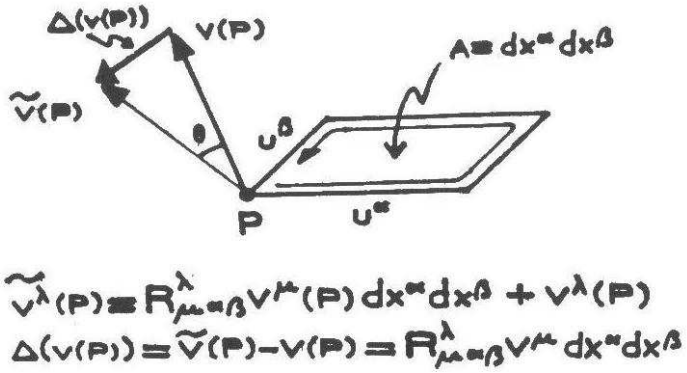


FIGURA 8. Viaje de un vector por el espacio curvo y tensor de Riemann.

Situémonos en R^3 por sencillez. Podemos considerar los Γ como 3 matrices, una para trasladar en cada dirección, y el tensor de Riemann como 6 matrices, una para cada pareja de índices distintos. Entonces R_{ab} será igual al operador que traslade según $\mathtt{dx}^a$ y, desde allí traslade según $\mathtt{dx}^b$ menos el operador que haga las dos operaciones en signo contrario (el truco está en que *no conmutan*). Son cuatro traslados, y en dos de ellos hay que usar no los símbolos de Christoffel en el punto original, sino en el punto un poquito trasladado (que aproximamos a primer orden en Taylor). El resultado es:

$$\mathsf{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}$$

Y trabajaremos con dos tensores que son promedios sobre éste:

$$\mathsf{R}_{\mu\nu} \equiv \mathsf{R}^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$$

tensor de Ricci, sumado sobre α (un cierto «promedio» en Riemann), y el **escalar de curvatura**:

$$\mathsf{R} \equiv \mathsf{R}^{\mu}{}_{\mu},$$

donde hemos subido uno de los índices para poder sumar. Este escalar de curvatura es cero sólo cuando el espacio es plano, y tiene que ver con la curvatura de Gauss (que, en una superficie, es el producto de las curvaturas máxima y mínima).

2.5. Identidades de Bianchi y Tensor de Einstein.

Por último vemos las **identidades de Bianchi**, unas relaciones topológicas que serán esenciales en la formulación de la Teoría General de la Relatividad.

La **topología** es más básica que la geometría. Es, para entendernos, la geometría de las tiras de goma: las propiedades de los objetos que se conservan cuando los estiras, deformas, encoges... hagas lo que quieras salvo romper o pegar. Rigurosamente: las propiedades que son invariantes bajo *difeomorfismos*, es decir, bajo la actuación de aplicaciones diferenciables e invertibles (rasgar y pegar no lo es).

Uno de los teoremas topológicos más obvios es «*La frontera de una frontera es cero*», que se expresa simbólicamente como $\partial\partial = 0$. La demostración la dejo para vosotr@s, pero un par de argumentos heurísticos: a) una pelota, su frontera es una superficie esférica, que a su vez... no tiene frontera; b) un disco, su frontera es una circunferencia que... no tiene principio ni fin.

Apliquémoslo a un cubo. La superficie del mismo no tiene frontera. Eso quiere decir que si tomamos las seis caras del cubo y recorremos cada una tomando como sentido de giro el dado por la mano derecha (con el dedo pulgar apuntando hacia fuera) las aristas se van «*matando*» dos a dos.

Aplicación a nuestro problema de la geometría diferencial. Toma un cubito y pasea un vector por las seis caras, en el sentido descrito. Cuando vuelve al punto de partida, a pesar de que haya curvatura, vuelve sin haber cambiado. Y la razón es que la frontera de una frontera es cero (*ver fig. 9*).

Si os trabajáis lo dicho llegáis (la demostración es directa y la dejo como ejercicio) a:

$$\mathsf{R}^{\mu}{}_{\rho\beta;\alpha} + \mathsf{R}^{\mu}{}_{\beta\alpha;\rho} + \mathsf{R}^{\mu}{}_{\alpha\rho;\beta} = 0$$

que podemos reescribir como $\mathsf{R}^{\mu}{}_{[\rho\beta;\alpha]} = 0$.

Y para terminar simplemente enunciamos que hay un tensor, llamado **tensor de Einstein**, cuya "*divergencia covariante*" es cero gracias a la identidad

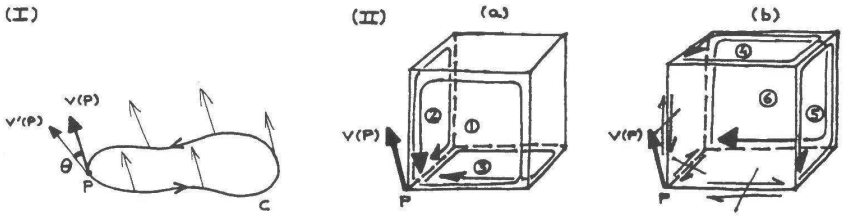


FIGURA 9. Las identidades de Bianchi. Si trasladamos un vector a lo largo de una trayectoria arbitraria éste volverá algo cambiado si el espacio es curvo (I). En cambio, si le hacemos recorrer cada uno de los seis circuitos que forman las seis caras de un cubo infinitesimal (IIa y IIb) el vector vuelve incólume gracias a las identidades de Bianchi, relaciones de tipo topológico que expresan el hecho de que la frontera de una frontera es cero.

de Bianchi:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

cumple que $G_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$.

NOTA: a nadie importe que la derivada $;\mu$ esté arriba: es un índice tensorial, que se puede subir y bajar como los otros.

Prueba (un poco tediosa y no aporta mucho): obviamente, el tensor de Riemann es antisimétrico en los dos últimos índices: $R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$, pues tiene sentido de giro. Ahora tomamos la identidad de Bianchi $R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0$. Contraemos a con d: $R^a_{bca;e} + R^a_{bae;c} + R^a_{bec;a} = 0$. Intercambiamos en el primer sumando la a de abajo con la c (cambiando el signo): $-R_{bc;e} + R_{be;c} + R^a_{bec;a} = 0$. Elevamos el b y lo contraemos con e: $-R^b_{c;b} + R^b_{b;c} + R^{ab}{}_{bc;a} = 0$. El tensor de Riemann es simétrico también ante el cambio $R^{ab}{}_{bc;a} = R^{ba}{}_{cb;a}$, así que el tercer sumando se transforma en $-R^{ba}{}_{bc;a} = -R^a_{c;a}$. Así tenemos $-2R^b{}_{c;b} + R_{;c} = 0$, es decir: $(R^b_c - 1/2R\delta^b_c)_{;b} = 0$, pero $\delta^b_c = g^b_c$ siempre, pues $g^a_b = g^{ac}g_{cb} = \delta^a_b$, y ya tenemos el resultado pedido: $G^b{}_{c;b} = 0$.

3. De la Física Plana.

3.1. El Espacio-Tiempo de Minkowski y la Teoría Especial de la Relatividad.

La Física Clásica plana era una teoría física que vivía feliz en un continuo espacio-temporal de cuatro dimensiones que se llamaba *de Minkowski*. Las leyes de aquel reino las había establecido el que fue su fundador, Albert Einstein,

allá por el lejano año de 1905, y estaban tan bien hechas que se deducían de tan sólo dos principios fundamentales:

1) Las leyes de la Física son las mismas en cualquier Sistema de Referencia (S.R.) inercial.

2) Dados dos eventos separados por un intervalo temporal dt y uno espacial dr, la cantidad $ds^2 = c^2dt^2 - \|dr\|^2$ es la misma desde cualquier S.R. inercial.

A partir de estas dos leyes fundamentales se deducía todo el Código Civil:

Todo *es como si* el espacio-tiempo de Minkowski fuera un espacio «*tipo Riemann*» –de los que veíamos en Geometría Diferencial– con una métrica dada por $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ y $c = 2'997924662(11)10^8 m/s$, es la velocidad de uno de los más brillantes habitantes de Minkowski, llamado *luz*. A la magnitud $s = \int ds$ lo llamaremos el **intervalo**.

La primera consecuencia de las leyes establecidas es que la luz tiene la misma velocidad en cualquier S.R., su intervalo es siempre cero. Pero la más importante de las leyes deducidas es esta otra: Ningún tipo de información puede viajar más rápido que la luz.

(Prueba: demostraremos que, en caso contrario, se violaría la Causalidad –ya sé, es otro principio que deberíamos haber incluido, pero de verdad os lo digo: si pusiéramos todos los supuestos tácitos, no tendríamos papel en el mundo para escribir estas notas. Pues bien, pongamos que yo estoy aquí en Madrid, pulso un botón e *inmediatamente* se encienden una luz en Madrid y otra en Moscú. Una persona a mitad de camino (pongamos en Ulm –Alemania) verá que ambas se han encendido al tiempo. Pero pongamos que esa persona se mueve hacia Moscú. Entonces le llegará un pelín antes la luz de Moscú, con tan buena fortuna que, como la velocidad de la luz es la misma en todo S.R., creería –y no tendría posibilidad de salir de su error– que fue la luz de Moscú la que causó la de Madrid, y no al revés. Así que la transmisión de información más rápida que la luz violaría el Principio de Causalidad.)

Tomemos ahora dos eventos cualesquiera: A={la caída de la manzana sobre Newton en su casa de Woolsthorpe allá por 1665} y B={la publicación del artículo de Einstein «*Sobre la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento*»

en 1905}. Tomamos sus coordenadas espaciales y temporales, formamos con ellas el intervalo $I(A, B)$ entre ambos eventos y vemos su signo. Si es positivo se dice que es **tipo tiempo**, y entonces una partícula viajando más despacio que la luz puede estar presente en ambos eventos. Si es cero, decimos que es **tipo luz**, y entonces sólo un rayo de luz podría conseguirlo. Y si es negativo entonces es **tipo espacio** y los dos eventos están desconectados causalmente: habría que ir más rápido que la luz para estar presente en los dos, y entonces se violaría la causalidad. De hecho, si el intervalo fuera tipo espacio, habría S.R. en los que ambos eventos serían simultáneos, otros en los que A ocurriría antes que B y otros en los que B ocurriría antes que A (*ver fig. 10*).

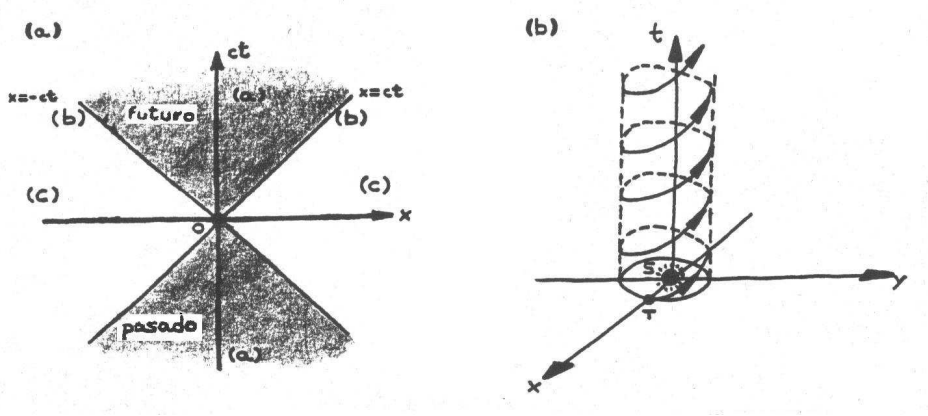


FIGURA 10. Espacio-tiempo de Minkowski (a) y movimiento planetario (b). Los eventos pertenecientes a la zona sombreada están causalmente conectados con el origen, definiendo por tanto un pasado y un futuro absolutos respecto a éste. No así en la zona sin sombrear, donde la definición de pasado y futuro depende del Sistema de Referencia. En (b) se puede ver la trayectoria espacio-temporal de la Tierra alrededor del Sol.

3.2. Las Transformaciones de Lorentz

Esta métrica tendrá, como dijimos al hablar de tensores, sus transformaciones invariantes Λ^i_j –llamadas **transformaciones de Lorentz**– que dejan invariante el intervalo: físicamente son los cambios de S.R, y matemáticamente se obtienen con facilidad. Toda transformación que no toque el tiempo y rote las x^i es ya una transformación de Lorentz. Ahora quedémonos sólo con x y t, de tal forma que el intervalo sea $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2$. Al igual que las rotaciones usuales conservan la norma euclídea usual, esta nueva norma es

conservada por estas «*rotaciones hiperbólicas*»:

$$\hat{x}^0 = \cosh(\theta)x^0 + \operatorname{senh}(\theta)x^1$$
$$\hat{x}^1 = \operatorname{senh}(\theta)x^0 + \cosh(\theta)x^1$$

que puedes comprobar con facilidad. Si $\theta = \operatorname{atanh}(v/c)$, con v la velocidad del nuevo S.R. respecto al antiguo, ya tienes las transformaciones de Lorentz en su forma clásica.

De estas transformaciones de Lorentz se ve directamente la contracción de longitudes y la dilatación de tiempos, pues $\cosh(x) \geq 1$ siempre. Se ve, ¿no?

3.3. El Tensor de Energía–Tensiones

Pasamos a contarlo todo sobre el **tensor de energía–tensiones**. Hay dos caminos para llegar a él: el «fenomenológico» y el teórico, y os propondré aquí las dos vías:

1.- Vía teórica. La mejor manera de fundamentar una teoría física es siempre la integral de acción, es decir, la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$. Si la teoría es invariante bajo traslación temporal tenemos el hamiltoniano, que es la energía, como cantidad conservada: $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$, con p el momento conjugado de q, la coordenada: $p \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$, y $\dot{q} \equiv \partial q/\partial t$

Cuando estamos en Mecánica Clásica tenemos como soluciones funciones de tipo $q(t)$, pero cuando tenemos una teoría de campos (ya sea un fluido, el campo electromagnético o el que quieras) la solución es $\phi(x, y, z, t)$, que es formalmente igual a una «*mecánica con cuatro tiempos*», así que la generalización de la energía es:

$$T^\mu{}_\nu \equiv \phi_{,\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}} - \delta^\mu_\nu\mathcal{L}$$

y la ley de la conservación de la energía, que antes era $d\mathcal{H}/dt = 0$, pasa a ser la ecuación invariante relativista $T^\mu{}_{\nu,\mu} = 0$

2.- Vía «fenomenológica»: tenemos una matriz que es

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} E & p_x & p_y & p_z \\ p_x & P & 0 & 0 \\ p_y & 0 & P & 0 \\ p_z & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

en cierto sistema de coordenadas. E es la densidad de energía, los p_x, p_y, p_z son las densidades de momento (pensad en un fluido) y la P es la presión. La

ecuación $T^{\mu}_{\nu,\mu} = 0$ son cuatro ecuaciones al mismo tiempo, todas muy obvias:

$$\frac{dE}{dt} = \nabla p \qquad \frac{dp}{dt} = \nabla P$$

La primera indica que, cuando cambia la densidad de energía en un punto, es porque hay momento que «huye» de él, y la segunda no es más que la segunda ley de Newton disfrazada de lagarterana.

Esta ley de conservación debería recordarnos la más familiar que proviene de la hidrodinámica (o la conservación de la carga):

$$j^{\mu} = (\rho, j_x, j_y, j_z)$$

$$j^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

Para seguir currando en este tema: coge el Feynman II y estudia la formulación relativista del electromagnetismo, con el cuadrivector potencial (ϕ, A) y el «*tensor de Faraday*» (que contiene los campos eléctrico y magnético en un solo objeto) y que sale de un «rotacional generalizado» del potencial. A partir de ahí salen las ecuaciones de Maxwell en una forma especialmente elegante: se hace una formulación (mirad el *Gravitation*) equivalente a la Geometría Diferencial: dos de las ecuaciones salen de la identidad de Bianchi y las otras dos de pedir la conservación de la carga. No lo comento en más detalle pues se sale un poco del tema.

4. Las Ecuaciones del Universo

Lo sé, lo sé, es un título muy rimbombante y el contenido tendrá que estar a la altura. Veremos qué se puede hacer.

4.1. La Ecuación de Einstein

Tenemos el tensor energía-tensiones, que se conserva en el espacio- tiempo plano debido (teorema de Noether) a la invariancia bajo el «*grupo de Poincaré*», que quiere decir que el Universo es el mismo en todas los lugares (invariancia traslación espacial: conservación del momento), en todo tiempo (invariancia traslación temporal: conservación de la energía), mirado desde cualquier ángulo (invariancia rotacional: se conserva el momento angular) y en cualquier S.R. inercial (conservación de cierta generalización 4D del momento angular). Todo eso junto es la ecuación $T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$.

Ahora pasamos a un espacio-tiempo curvo. ¿Qué quiere eso decir?, pues que las simetrías que hemos expuesto ya no tienen por qué seguir en vigor. La geometría no tiene por qué ser la misma aquí que en tu casa, ni hoy que mañana... Pero tenemos una derivada que se «saltaba» la geometría: la derivada covariante. Por tanto, si corregimos la ecuación para que aparezca como

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

debería ser válida, ¿no? Pero ya no hay simetría que sostenga esta afirmación... Ya no tiene por qué. Sería bonito para «cerrar» nuestro marco conceptual...

De acuerdo, ya no hay simetría que nos dé la conservación del tensor energía-tensiones, ¿a quién podremos acudir? Hemos curvado el Universo sin ninguna consideración... La propiedad en la que nos basemos tiene que permanecer invariante cuando retorzamos el espacio-tiempo. Pero hay una disciplina matemática que cumple esa condición: la Topología.

Un ejemplo: la cinta de Möbius, ya sabéis, una tira larga de papel que convertimos en un anillo pero, antes, hacemos un giro de 180° a uno de los extremos. No entraré en las mil y una cosas divertidas que se pueden hacer con ese objeto, pero sepáis una cosa: el «twist» que tiene no puede desaparecer por mucho que dobléis la cinta, mientras no la rompáis. Eso es una propiedad topológica. Otros ejemplos serían un nudo de verdad (matemático), un toro (no se puede hacer desaparecer el agujero sin romperlo)... Sobre la aplicabilidad de la topología en Física se podría hablar durante años...

Así que acudimos a esa instancia superior y nos dice: igualad el tensor $T^{\mu\nu}$ a alguno que tenga divergencia cero *gracias a alguna ley topológica*. Pero tenemos el tensor de Einstein, $G^{\mu\nu}$, cuya divergencia es cero gracias a las identidades de Bianchi. Eso es lo que queríamos: hacemos

$$G^{\mu\nu} = KT^{\mu\nu}$$

(Ésa es la Ecuación de Einstein) y ahora la «conservación» de la energía, el momento... y todo eso es una propiedad topológica, más fuerte que una condición geométrica, pues nos permite deformar el espacio–tiempo a gusto sin violarla.

Y aquí viene lo mejor: esa ecuación que hemos propuesto Es Realmente la ecuación de campo de la gravitación: es *un acoplo entre la materia y la geometría, dictado por la topología*. Más o menos viene a decir:

Curvatura del Universo $\propto$ Densidad de «*materia*».

Esa ecuación dicta cómo la materia curva la geometría, pero necesitamos la otra: cómo la curvatura mueve a la materia. Pero esa ecuación la tenemos desde hace tiempo, es la ecuación geodésica, si «τ» es el tiempo propio (que coincidía con el intervalo):

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

4.2. La Aproximación Newtoniana

Ahora habrá que hacer cálculos, es inevitable... Tenemos la ecuación de Einstein, de la que aún tenemos que averigüar cuánto vale la K, y qpor otro lado tenemos la ecuación de movimiento de partículas en el espacio-tiempo, la ecuación geodésica, que no vemos en qué se puede parecer a la segunda ley de Newton...

Para averigüar el valor de las constantes y asegurarnos de la consistencia de nuestras ecuaciones hacemos el «*límite Newtoniano*», es decir, supondremos $c \to \infty$ y espacio casi plano:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

con $h_{\mu\nu}$ pequeño. Es en el caso de grandes curvaturas cuando la Teoría General de la Relatividad toma su máximo poder, siendo buena la aproximación newtoniana en el caso de espacios poco curvados. Además, supondremos estática la geometría, pues la gravitación newtoniana era estática (de hecho tenía el problema siguiente: si desaparece hoy la galaxia de Andrómeda, ¿cuánto tardaremos en darnos cuenta por los efectos gravitatorios?).

En gravitación newtoniana, la «equivalente» de la ecuación de Einstein es la ecuación de Poisson, $\nabla^2\phi = 4\pi G_N \rho$ y la equivalente de la ecuación geodésica es la segunda ley de Newton: $d^2x^i/dt^2 = -\nabla\phi$. Ése es nuestro objetivo.

Como estamos en la aproximación no-relativista, $|dx/d\tau| \ll |dt/d\tau|$, así que en la ecuación geodésica en el segundo sumando sólo importa el término $\Gamma^\mu_{00}(dt/d\tau)^2$, siendo despreciables los otros por sólo contar con derivadas respecto a τ de componentes espaciales.

Sólo calcularemos, por tanto, Γ^μ_{00}. La fórmula general para los símbolos de Christoffel era

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

Sustituyendo α y β ambas por cero:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{0\nu,0} + g_{\nu0,0} - g_{00,\nu})$$

Y ahora despreciamos todas las derivadas temporales de la métrica:

$$\Gamma^\mu_{00} \sim -\frac{1}{2}g^{\mu i}g_{00,i}$$

donde se usa el convenio de poner índices latinos ($i, j...$) cuando no pueden tomar el valor 0 (sólo índices espaciales). Recordamos que $g^{\mu\nu}$ era la inversa de la métrica. Como estamos a primer orden en $h_{\mu\nu}$ (espacio casi plano) subiremos y bajaremos índices no con $g_{\mu\nu}$, sino con $\eta_{\mu\nu}$, así que

$$\Gamma^\mu_{00} \sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu i}h_{00,i}$$

y «eso» sólo vale algo cuando $\mu \neq 0$, porque i es espacial, así que cuando $\mu = 0$, $\eta^{\mu i} = 0$ por narices, porque la métrica de Minkowski es diagonal (¿se ve la manera de razonar con tensores?). Y, en este caso, como hemos tomado el convenio de la métrica $+---$, $\eta^{ii} = -1$.

En aproximación no-relativista, $\tau \sim ct$, así que

$$\frac{d^2x^i}{c^2dt^2} + \frac{1}{2}h_{00,i} = 0$$

Y esto ya Sí se parece a la segunda ley de Newton, si

$$h_{00} \sim \frac{2\phi}{c^2}$$

Así que ya sabemos que, en aproximación newtoniana, la métrica hay que interpretarla de esta manera: sólo el coeficiente g_{00} se desvía del valor en el espacio de Minkowski, y, en lugar de $+1$, vale $g_{00} = 1 + (2\phi/c^2)$, donde ϕ es el potencial newtoniano.

Seguimos con los cálculos. Ahora queremos ver la aproximación newtoniana actuando sobre la ecuación de Einstein. En este caso, la única componente del tensor $T^{\mu\nu}$ que cuenta es la T^{00}, puesto que la densidad de energía es «ρc^2+ densidad de energía cinética», y tanto esta última como los momentos o las presiones son despreciables gracias al c^2. Entonces tenemos $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, así que $G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}(1 + 2\phi/c^2)R$. Pero

$$R_{00} = R^\mu{}_{00\mu} = \Gamma^\mu_{0\mu,0} - \Gamma^\mu_{00,\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha0}\Gamma^\alpha_{0\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{00}$$

despreciamos los productos de Γ por ser cuadráticos en $h_{\mu\nu}$ y eliminamos $\Gamma^{\mu}_{0\mu,0}$ por llevar derivadas temporales de la métrica. Así que sólo queda

$$R_{00} \sim -\Gamma^{i}_{00,i} \sim \frac{1}{2}h_{00,ii} = \nabla^2\phi/c^2$$

Y ahora el escalar de curvatura:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \sim g^{00}R_{00} \sim \nabla^2\phi/c^2$$

Así que

$$G_{00} = \nabla^2\phi - \frac{1}{2}\nabla^2\phi = \frac{1}{2}\nabla^2\phi = K\rho c^2$$

pero como $\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho$, tenemos que $K = 8\pi G_N/c^4$. Reescribimos la ecuación de Einstein para que dé el límite newtoniano correcto (y se beneficie de la experiencia que dan 3 siglos de astrofísica):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ésa es la famosa ecuación de Einstein, una ecuación altamente no lineal en derivadas parciales, y, obviamente, nadie sueña con una solución general.

En cuanto a las condiciones iniciales (c.i.) de la ecuación de Einstein, es otra vez un problema gordo. Hay toda una formulación, llamada *ADM* (por Adenowitt, Deser y Misner) que pide como c.i. la «*3-geometría*» (es decir, la geometría del espacio, a «foto fija») y su ritmo de cambio para darte la evolución futura. También hay una formulación lagrangiana, con su principio de mínima acción. La lagrangiana la obtuvo Hilbert en 1915, y resulta ser... el escalar de curvatura:

$$S = \int \mathcal{L}\sqrt{g}d^4x = \int R\sqrt{g}d^4x$$

donde se ha añadido $\sqrt{g}$ pues es el jacobiano por integrar en un espacio-tiempo curvo.

Habréis quizás oído hablar de un cierto *parámetro cosmológico*: la versión que Einstein dio en principio de sus ecuaciones fue $G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$. Cumple igual de bien que $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, pues $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$. Pero, ¿por qué lo puso? Cuando lleguemos a la parte de Cosmología veremos que estas ecuaciones, cuando se intentan aplicar al Universo como un todo, nos dan la imposibilidad de que éste

sea estático... salvo que se añada este término. Años después, cuando Hubble encontró la recesión de las galaxias, Einstein llamó al parámetro cosmológico (Λ) el mayor fiasco de su vida. Aun así hoy tiene aplicaciones al estudiar, por ejemplo, la era de la inflación.

Formulaciones de la Teoría General de la Relatividad hay muchas. Las hay que prescinden de la interpretación geométrica de la gravitación y tratan a la teoría como una especie de electromagnetismo complicado. Incluso Kaluza y Klein encontraron una manera de obtener el electromagnetismo de las ecuaciones de Einstein, con sólo suponer que el espacio-tiempo tiene *5 dimensiones*... Hay además otras teorías alternativas de la gravitación, la mayoría ya descartadas por los experimentos, todas menos elegantes que la T.G.R., pero que no se desechan porque hay un problema en pie, que resiste a las mentes más incisivas: la cuantización de la Gravedad.

5. Solución de Schwarzschild y Agujeros Negros

5.1. La Solución de Schwarzschild

Al año de haber publicado las ecuaciones apareció la primera solución. La dio un físico alemán llamado Karl Schwarzschild que había sido herido en batalla (era la Primera Guera Mundial) y murió poco tiempo después (no mucho tiempo después fue cuando los militares se dieron cuenta de que los físicos tenían más utilidades que como carne de cañón, pero esa es otra historia y será contada en otro lugar).

Schwarzschild quiso obtener el equivalente al problema de Kepler para la T.G.R., así que supuso:

a) Simetría esférica (Sol esférico).
b) Geometría estática (Sol quieto, sin manchas ni nada).
c) Espacio-tiempo vacío (salvo en el origen de coordenadas, donde estaba el Sol).
d) Espacio asintóticamente plano (muy lejos del Sol, no hay gravedad).

En coordenadas esféricas el elemento de línea (métrica) para el espacio-tiempo plano es:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)$$

y el resto de los elementos nulos, así que la forma más sensata para la métrica

será la dada por:

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)$$

o, lo que es lo mismo,

$$g_{00} = A(r),\ g_{11} = -B(r),\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2 sen^2\theta$$

y conservamos la forma «plana» en θ y ϕ para conservar la simetría esférica. Ahora «metemos» esa forma de la métrica en las ecuaciones de Einstein y obtenemos:

NOTA: los siguientes cálculos son tediosos y poco esclarecedores. Puedes saltártelos sin remordimientos de conciencia y seguir leyendo después.

a) Símbolos de Christoffel: según un proceso tedioso pero directo sustituimos en las fórmulas las únicas derivadas no nulas de la métrica:

$$g_{00,1} = A', \qquad g_{11,1} = -B', \qquad g_{22,1} = -2r$$
$$g_{33,1} = -2r\sin^2\theta, \qquad g_{33,2} = -r^2\sin\theta\cos\theta.$$

y, como la métrica es diagonal, su inversa es simplemente tomar los inversos de los elementos de la diagonal:

$$g^{00} = 1/A(r),\ g^{11} = -1/B(r),\ g^{22} = -1/r^2,\ g^{33} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$$

así que, mediante simple sustitución en la fórmula para los símbolos de Christoffel, obtenemos (¡prueba a hacerlo!) los únicos elementos no nulos (A', B' : $dA/dr, dB/dr$):

$$\Gamma^0_{01} = A'/2A \qquad \Gamma^1_{00} = A'/2B \qquad \Gamma^1_{11} = B'/2B$$
$$\Gamma^1_{22} = -r/B \qquad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta/B \qquad \Gamma^2_{21} = 1/r$$
$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \qquad \Gamma^3_{32} = cotan\theta \qquad \Gamma^3_{31} = 1/r$$

Como ejemplo calcularé el Γ^0_{01} en detalle:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d})$$

y hacemos $a = 0, b = 0, c = 1$ y $d = 0, 1, 2, 3$:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\left[g^{00}(g_{00,1} + g_{10,0} - g_{01,0}) + g^{01}(g_{01,1} + g_{11,0} - g_{01,1}) + \right.$$
$$\left. + g^{02}(g_{02,1} + g_{12,0} - g_{01,2}) + g^{03}(g_{03,1} + g_{13,0} - g_{01,3})\right]$$

En esta fórmula un montón de términos son cero: de hecho todos los que lleven g_{ab} con $a \neq b$. Nos queda, tras sustituir:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,1} = \frac{1}{2A}\frac{\partial A(r)}{\partial r} = A'/2A.$$

¿De acuerdo? En general, para métrica diagonal, se cumple que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{cases} \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}g_{\alpha\alpha,\beta} & \text{para cualquier par } \alpha, \beta \\ \Gamma^\alpha_{\beta\beta} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}g_{\beta\beta,\alpha} & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

b) Ahora nos percatamos de que, cuando el espacio-tiempo es plano, no sólo $G_{\mu\nu} = 0$, sino que $R_{\mu\nu} = 0$. Calculamos las componentes del tensor de Ricci de la misma manera: hago uno en detalle y os pongo el resultado de los demás:

$$R_{ab} \equiv R^c_{acb} = \Gamma^c_{ab,c} - \Gamma^c_{ac,b} + \Gamma^c_{dc}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{db}\Gamma^d_{ac}$$

es la fórmula general. Concretaremos para $a = b = 0$:

$$R_{00} = \Gamma^c_{00,c} - \Gamma^c_{0c,0} + \Gamma^c_{dc}\Gamma^d_{00} - \Gamma^c_{d0}\Gamma^d_{0c}$$

donde c, d van sumados sobre 0, 1, 2, 3. Por una vez, y sin que sirva de precedente, vamos a expandir esa expresión del todo:

$$\begin{aligned} R_{00} = {} & \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^1_{00,1} + \Gamma^2_{00,2} + \Gamma^3_{00,3} - \Gamma^0_{00,0} - \Gamma^1_{01,0} - \Gamma^2_{02,0} - \Gamma^3_{03,0} \\ & + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{00} \\ & + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{00} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{00} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00} \\ & - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{01} - \Gamma^1_{20}\Gamma^2_{01} - \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{01} \\ & - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{02} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{02} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{02} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{03} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{03} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{03} \end{aligned}$$

Nos quedamos sólo con los términos no nulos:

$$\begin{aligned} R_{00} = {} & \Gamma^1_{00,1} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} \\ = {} & \Gamma^1_{00,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} \end{aligned}$$

sustituyendo los valores de los símbolos de Christoffel y sacando factor común el Γ^1_{00},

$$R_{00} = \left(\frac{A'}{2B}\right)' + \frac{A'}{2B}\left(\frac{B'}{2B} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{A'}{2A}\right)$$

Operando llegamos a la forma más conveniente:

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{A'}{rB}$$

Los demás elementos no nulos son los diagonales:

$$R_{11} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) + \frac{B'}{rB}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{B} + 1 - \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \qquad R_{33} = R_{22}\,\mathrm{sin}^2\,\theta$$

y esos cuatro bichos son cero. Los demás elementos de $R_{\mu\nu}$ también, pero de forma trivial. Multiplicamos la R_{00} por B/A y la sumamos a R_{11}, obteniendo $A'/A + B'/B = 0$, así que tenemos $A'B + B'A = 0$, que implica que AB =cte., que asimilamos a c^2 por las condiciones de contorno (espacio asintóticamente plano). Metemos ahora $B = c^2/A$ en la ecuación de anulación de R_{22} y tenemos $A + rA' = c^2$ o bien $d(rA)/dr = c^2$, e integrando obtenemos $rA = c^2(r + k)$, con k constante de integración. Ya tenemos la solución:

$$A(r) = c^2(1 + k/r), B(r) = (1 + k/r)^{-1}$$

Como en el límite newtoniano $A(r) \sim 1 + 2\phi/c^2$, podemos decir que para una masa puntual $\phi(r) = -GM/r$, así que $k = -2GM/c^2$ y

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sin}^2\,\theta d\phi^2\right)$$

es la métrica cerca de una masa puntual, el llamado **espacio-tiempo de Schwarzschild** (¡Al fin!).

5.2. Contenido Físico de la Solución de Schwarzschild

Entramos en la explicación del significado de la solución obtenida. Ante todo notamos que las variables r y t no pueden mantener el significado que

tenían en el espacio-tiempo plano. Por ejemplo, la r ya no mide distancias: la distancia (a igualdad de ángulos y de tiempos) de dos puntos con distinto r no es Δr, sino mayor: una integral:

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}\,dr$$

¿qué es entonces la «*coordenada radial*»?

Pues la pista nos la da el ver la parte angular de la métrica: $r^2(d\theta^2 + \mathrm{sin}^2\,\theta d\phi)$. Si tomamos, a un tiempo dado, el conjunto de puntos con coordenada radial r_0, resulta que forman una "esfera" que rodea al Sol, con superficie $4\pi(r_0)^2$. La distancia de cualquiera de esos puntos al Sol NO es r (de hecho podéis comprobar que es ∞), y el volumen encerrado NO es $\frac{4}{3}\pi(r_0)^3$. Así podemos hacernos una idea de la geometría espacial de Schwarzschild donde hemos obviado el ángulo θ: las distancias según la radial se miden sobre la superficie curva, pero con coordenada radial dada por la distancia al origen en la superficie plana, que además nos da las longitudes de las circunferencias (y áreas de esferas) correctamente (ver fig. 11).

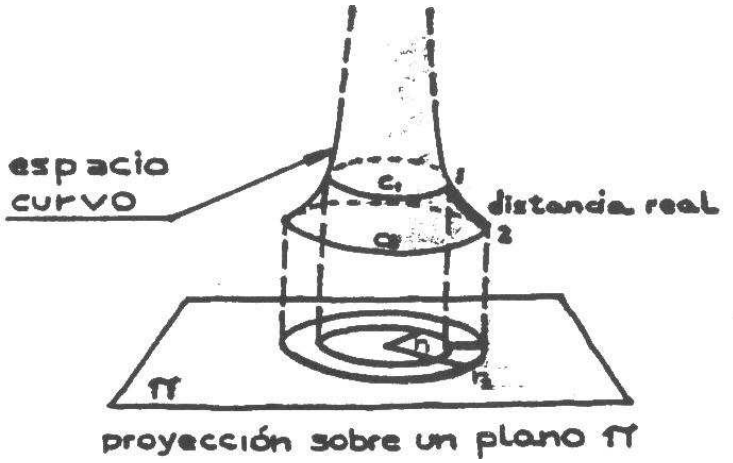


Figura 10. Distancias en la métrica de Schwarzschild.

También en tiempos tenemos un fenómeno curioso: el coeficiente que acompaña a dt es tanto más pequeño cuanto más cerca estemos de la masa central. Eso quiere decir que el intervalo temporal medido entre dos eventos es más corto cuando estás dentro de un campo gravitatorio. Como consecuencia, si yo (que estoy en el espacio exterior) veo que un determinado neutrón ha

tardado en desintegrarse 15 minutos, una persona que está pegada en la superficie de un púlsar puede llegar a creer que ha tardado sólo 5 minutos. Este efecto (menos dramático por haberse hecho en la Tierra) ha sido comprobado experimentalmente con relojes atómicos...

5.3. Movimiento en el Espacio-Tiempo de Schwarzschild

Ahora tenemos que escribirnos la ecuación geodésica y resolverla, para estudiar cómo es el movimiento planetario, y ver cuáles son las discrepancias con el modelo newtoniano. Aconsejo en este punto a todo el mundo que repase la solución del problema de Kepler en el caso newtoniano, porque el proceso se va a parecer mucho.

Podemos decir que tenemos una lagrangiana:

$$\mathcal{L} = c^2(1 - 2GM/c^2r)\dot{t}^2 - (1 - 2GM/c^2r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2$$

(hemos puesto ya $\theta = \pi/2$ para simplificar y las derivadas son respecto al tiempo propio). La ecuación geodésica es la ecuación de Euler-Lagrange de esta lagrangiana. Por ejemplo, la ecuación radial es (hacemos $m \equiv GM/c^2$):

$$(1 - 2m/r)^{-1}\ddot{r} + m/r^2\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-2}m/r^2\dot{r}^2 - r\dot{\phi}^2 = 0$$

Como la lagrangiana no depende explícitamente de t ni de ϕ tenemos dos cantidades conservadas, sus momentos conjugados (recordamos que el momento conjugado de q es $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$), que son (debido al teorema de Emmy Noether) respectivamente energía y momento angular:

$$k = (1 - 2m/r)\dot{t}, \qquad h = r^2\dot{\phi}$$

Pero tenemos también la ecuación definidora del tiempo propio (una ecuación «*tipo conservación de la energía*»):

$$c^2(1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = c^2$$

sí, es la lagrangiana, que se conserva en este caso, como es lógico, pues es Toda Cinética... En esta ecuación sustituimos $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$ por las cantidades conservadas que tenemos y depués sustituimos las derivadas respecto al tiempo propio de r por derivadas respecto a ϕ (igual que se hace en el problema de Kepler):

$$(dr/d\phi)^2 + r^2(1 + c^2r^2/h^2)(1 - 2m/r) - c^2k^2r^4/h^2 = 0$$

Hacemos $u \equiv 1/r$ y obtenemos:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = E + \frac{2GM}{h^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3$$

Es igual que la ecuación de Binet (la newtoniana) salvo por el último término en u^3. Es como si sólo hubiera cambiado el potencial efectivo, apareciendo un término cúbico (ver fig. 12).

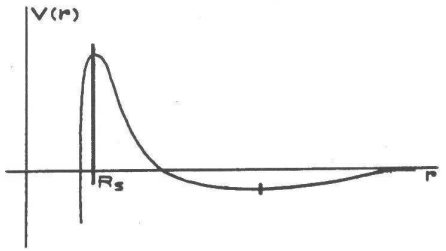


Figura 12. Potencial de Einstein.

Este término cúbico se trata por teoría de perturbaciones según el método de Lindstedt (usual en astronomía) y sacamos (a primer orden) la precesión en los perihelios de los planetas. Esta precesión resulta ser

$$\Delta\phi = \frac{3GM\pi}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

donde r_1 y r_2 son las coordenadas radiales del afelio y del perihelio. Obviamente, la mayor corrección es sobre Mercurio, y da unos 43" de arco por siglo. Esta corrección era conocida de los astrónomos del siglo pasado, pero no tenían una explicación para ella, llegando incluso a postular la existencia de un pequeño planeta más cerca del Sol, al que bautizaron como *Vulcano*.

Otro problema es el de la deflexión de la luz al pasar cerca del Sol. Como también sigue geodésicas, se desviará, y podemos calcular la diferencia entre el ángulo que llevaba antes y el que lleva después de pasar cerca del Sol. Este efecto hace que las imágenes de las estrellas aparezcan desplazadas respecto a sus «posiciones verdaderas», pero es tan pequeño que sólo se puede medir bien cuando hay un eclipse de Sol. En este caso miramos a las estrellas que están cerca del mismo y vemos que sus posiciones no concuerdan con las que tenían cuando estaban lejos del Sol... (ver fig. 13)

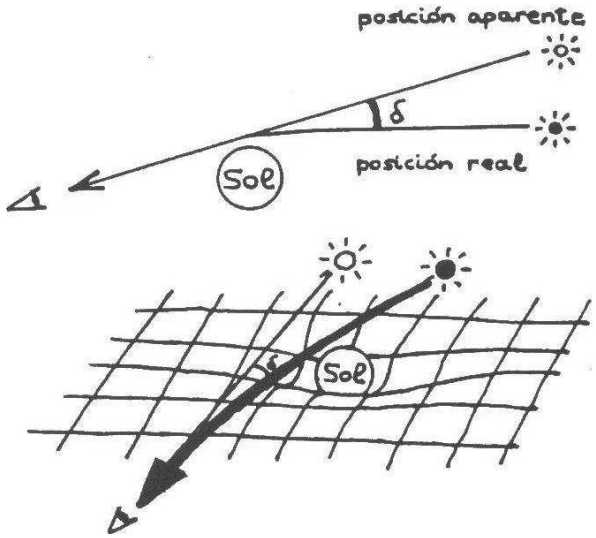


FIGURA 13. Desviación gravitacional de la luz.

Para este problema no valen los cálculos que hicimos en la sección anterior. ¿Por qué? Pues porque los fotones tienen $d\tau = 0$, y el tiempo propio ya no es un buen parámetro para las líneas geodésicas. Introducimos cualquier otro parámetro para esas curvas (por ejemplo, le llamamos λ) y tenemos

$$c^2(1-2m/r)\dot{t}^2 - (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 0$$

igualado a 0 en lugar de a c^2 por ser geodésica nula ($d\tau = 0$). Ahora la ecuación de Binet ha cambiado:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = F + \frac{2GM}{c^2}u^3$$

donde $F \equiv c^2k^2/h^2$. Puedes comprobar que si hacemos $M = 0$ tenemos una solución en línea recta. Pero al ser $M \neq 0$ tenemos que adaptarnos, así que haremos $u \equiv u_0 \sin\phi + v$, donde v es pequeño. Obtenemos como ecuación para v (a primer orden):

$$v = \frac{1}{2}u_0^2(1+\cos^2\phi - sen\phi) + A\cos\phi$$

Imponiendo como condición inicial que el fotón venga de infinito en la dirección $\phi = 0$ entonces $A = -u_0^2$, así, cuando $u \to 0$ obtenemos una desviación de

$4GM/(r_0c^2)$, donde r_0 es la distancia mínima del Sol a la que llegó a pasar. Para el Sol tendríamos unos 1.75" de arco. Haciendo ciertas salvedades experimentales, ese valor fue medido por Eddington en 1917, dando la primera confirmación experimental de la T.G.R.

5.4. Agujeros Negros

Echad otro vistazo a la métrica de Schwarzschild. ¿Qué ocurre cuando $r = 2GM/c^2$? Pues el coeficiente de t se hace cero y el de r se hace infinito... Y una vez "dentro" de ese valor, la coordenada que lleva el signo + es la espacial r, y la que va con el signo − es la temporal, t (ver fig. 14).

Ya lo había predicho Laplace en el siglo XVIII: si una estrella fuera tan densa como para que su velocidad de escape fuera mayor que la de la luz, no podríamos verla. Pero, ¿qué es lo que pasa con la teoría? ¿no es aplicable al Sol, por ejemplo? Bueno, bueno... resulta que el radio del Sol es mucho mayor que el valor que da problemas (que, por cierto, se llama *radio de Schwarzschild* r_s): unos 3 km, y para la Tierra unos 9 mm. Como dentro del objeto no vale la solución de Schwarzschild (podéis comprobar que dentro de la Tierra el potencial va, en lugar de con $1/r$, con r^2, así que una partícula dejada caer en un túnel que pasase por el centro de la Tierra haría un movimiento oscilatorio) tenemos que para estrellas normales la singularidad no existe.

Pero podría haber objetos para los que la densidad fuera tan grande que existiese la singularidad. En teoría de la evolución estelar, si la masa original de la estrella es suficientemente grande, podría, al agotar su combustible, colapsar hasta formar una bola con radio menor que su radio de Schwarzschild: un agujero negro (en terminología de Wheeler; los rusos las llamaron «estrellas congeladas», que suena mejor).

¿Qué ocurriría a una partícula que cayera en un agujero negro? Si hacéis las cuentas (y ya sabéis hacerlas) ella cae (tiempo propio) a la singularidad central en un tiempo finito, pero nosotros, que estamos fuera, la vemos caer en un tiempo infinito. Eso implica que veremos que se pega a la «pared» de la estrella (a la esfera con radio el de Schwarzschild, que se llama «horizonte de sucesos») y se queda congelada. Como la energía luminosa que envió es finita, veremos simplemente que se va apagando.

De hecho, al colapsar una estrella, nosotros nunca veríamos terminado el colapso, sino que una «cáscara» de materia se pega al horizonte de sucesos y se va difuminando. Estoy despreciando efectos como que dicho horizonte crezca al caer materia realmente en él, porque nuestro agujero negro es estático. De todas maneras, los modelos dinámicos de agujeros negros (como el de Oppenheimer y Snyder) dan la misma solución (colapso en tiempo propio finito, pero en tiempo

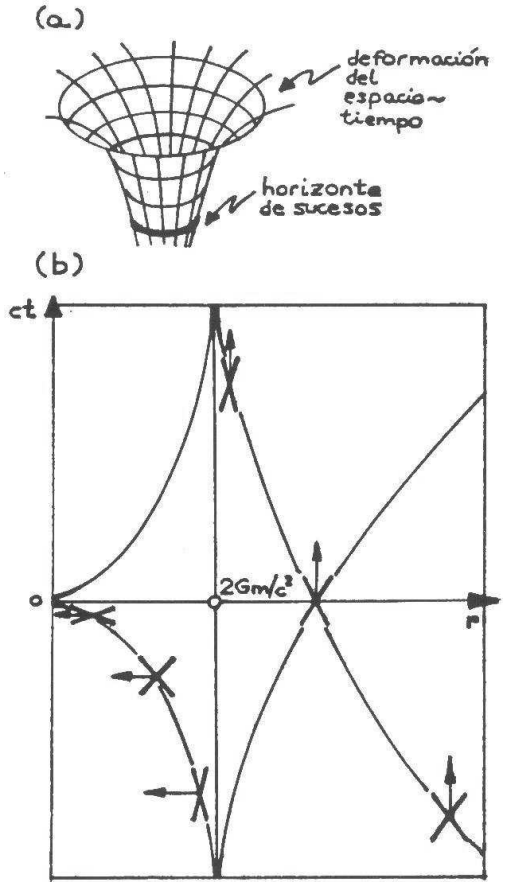


FIGURA 14. Agujero negro y horizonte de sucesos (a). Ejes espacio-temporales en un agujero negro (b). Las flechas indican la dirección temporal de los ejes coordenados locales y las aspas figuran como los conos de luz.

infinito para un observador externo).

Nada puede escapar de un agujero negro, porque para hacerlo tendría que viajar más deprisa que la luz. Así que el área del agujero crece y crece, a medida que se pierde información dentro de él. Por eso se dice que el área es medida de la entropía de un agujero negro.

Stephen Hawking, sin embargo, ha dado un argumento por el que los agujeros negros deberían devolvernos materia además de chuparla. Según la

teoría cuántica de campos, cerca de un campo intenso hay probabilidad de que se formen pares partícula-antipartícula, por ejemplo un par electrón-positrón, a costa de la energía del campo (pero de forma virtual, volviéndose a destruir en un tiempo muy pequeño, compatible con la relación de indeterminación enegía-tiempo). Imaginemos que el positrón cae en el agujero negro, y que el electrón no tiene ya con quien volverse a destruir, así que escapa y llega a nosotros (ver fig. 15). ¿De dónde vienen su masa y su carga? Pues han salido del agujero negro, que ahora tiene un poco menos de campo gravitatorio (y, por tanto, es como si hubiera adelgazado, de hecho ha perdido masa). Sólo una objeción: no sabemos nada sobre la teoría cuántica de la gravedad, así que esto no pasa de ser mera especulación.

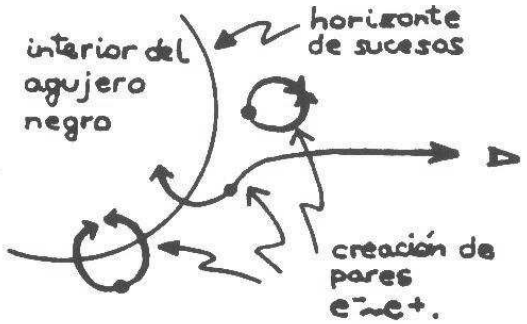


FIGURA 15. Evaporación de un agujero negro.

Asimismo es sólo especulación, pero también divertida, la idea de **agujero de gusano**. Supongamos que consideramos la variación en el intervalo (tiempo propio) según nos acercamos por una radial. Es «como si» viviéramos en una superficie de revolución dada por una ecuación $z(r)$, donde z vendrá dada por la ecuación:

$$ds^2 = dr^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 dr^2 = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r^2}\right)\right] dr^2$$

y eso lo igualamos a $(1 - 2m/r)^{-1}$. La solución de esa ecuación diferencial es $z^2(r) = 8m(r - 2m)$... que es un paraboloide, el paso a través del radio de Schwarzschild es como el paso de una hoja a otra de una superficie de Riemann. Más o menos esa solución viene a decir que cuando pasas del radio de Schwarzschild no caes en un pozo sin retorno ni nada por el estilo, sino que pasas a un «mundo a través del espejo», equivalente al mundo de donde

saliste (ver fig. 16). Podría ser otro Universo, o bien otra parte de tu mismo Universo... Chi lo sa?

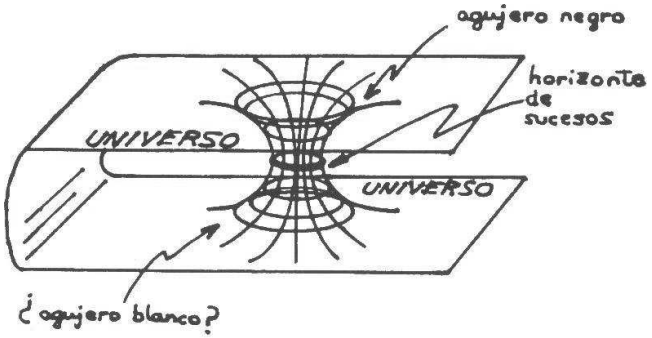


FIGURA 16. Agujero de gusano.

Bibliografía

He aquí con qué martiricé yo mi neurona para poder contaros todo esto:

E.F. TAYLOR, J.A. WHEELER, *Spacetime physics*, Freeman & Co. (1963). El mejor libro jamás escrito sobre teoría especial de la relatividad a nivel elemental. Desafortunadamente, fuera de edición en este momento, pero está en (casi) todas las buenas bibliotecas de física.

R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON, M. SANDS, *Física*, vols. I y II, Addison–Wesley (1987, original de 1963). El mejor curso de física general. En el volumen I habla de fundamentos de teoría especial de la relatividad, y en el II de la aplicación al electromagnetismo. Al final del tomo II hay un capítulo dedicado a la T.G.R.

C.W. MISNER, K.S. THORNE, J.A. WHEELER, *Gravitation*, Freeman (1973). La Biblia, la Torá y el Kamasutra al mismo tiempo. Además es uno de esos libros legibles como una novelita y con cierto ambiente... ¿mágico?

J. FOSTER, J.D. NIGHTINGALE, *A short course in General Relativity*, Springer (1995). Este es sencillito, y para empezar está muy bien.

R.P. FEYNMAN, F.B. MORINGO, W.G. WAGNER, *Lectures on Gravitation*, Addison-Wesley (1995). Como siempre, una visión original del tema.

S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1964). Por inescrutables razones que escapan a mi entendimiento, es el que adora el profesorado.

A. EINSTEIN, *Sobre la Teoría de la Relatividad*, Alianza Editorial (1984). Baratito y explica detalladamente las bases de las dos relatividades.

E.A. ABBOTT, *Planilandia*, Torre de Viento (1999). Contiene las aventuras de «*Cuadrado A*» y sus amigos planilandeses. En el proyecto Gutenberg (en Internet) podéis encontrar la versión inglesa original: «*Flatland, a romance of many dimensions*».

R. RUCKER, *The fourth dimension*, Houghton Mifflin (1984). Se llegó a publicar en castellano, en Salvat, pero se agotó hace mucho. Todo sobre planilandias, paradojas temporales, etc. etc. Una joyita.

J.R. WEEKS, *The shape of space*, Marcel Dekker (2001). Una introducción sencilla a la topología diferencial.