
Ecuaciones.

1. Ecuaciones con una incógnita.

PERO... ¿QUÉ ES UNA ECUACIÓN?

Una ecuación no es más que una manera curiosa de llamar a un número. En realidad, la idea de ecuación la empleamos continuamente en el lenguaje, al utilizar expresiones como «el padre de mi amigo Pepe». Es una manera «diferente» de referirme al señor José Sánchez, que es progenitor de mi amigo Pepe.

Del mismo modo puedo decir, en lugar de 9, el número cuyo siguiente es 10. O el número cuyo cuadrado es 81, o el número cuyo doble es 18, ó... Todo esto son ecuaciones, y así es como se daban hasta la Edad Media: en forma «discursiva».

Fue a los matemáticos árabes a los que se les ocurrió la manera de simplificar. La idea es sencilla, pero no se les ocurrió de repente. Lo que primero se les ocurrió fue llamar al número «*cosa*». Así, el 9 también puede llamarse « $2 \times \text{cosa} = 18$ ». Al fin se les ocurrió que, en lugar de *cosa* podrían poner la inicial sólo: x . Así llegamos a la forma actual de la ecuación:

$$2x = 18 \quad \longleftrightarrow \quad \text{El número que, multiplicado por dos, da 18.}$$

De este modo, «resolver» una ecuación no significa más que encontrar el número al que se estamos llamando de otra forma.

¿Toda ecuación tiene solución? Siguiendo con la analogía, hay veces que nos referimos a gente que no existe. Por ejemplo, «la novia de mi primo Alfredo» es una «*ecuación*» que no tiene solución, porque mi primo Alfredo es boracho, estúpido, feo y no tiene moto, así que ninguna chica se le acerca. En cambio, «el novio de mi prima Eva» se refiere a un conjunto bastante amplio de chicos...

En conclusión: no os sorprendáis cuando una ecuación no tenga soluciones, o cuando tenga más de una.

Como ejercicio: escribe una ecuación tan complicada como puedas que tenga solución 2, otra que no tenga ninguna solución y otra que tenga más de una solución.

PERO... ¿CÓMO SE RESUELVE UNA ECUACIÓN?

Buena pregunta. Ante todo: hay dos principios generales para resolver ecuaciones dadas en esa forma tan bonita que inventaron los árabes. El primero es: «deja a la x sola», y el segundo: «lo que hagas en un lado, hazlo en el otro».

Pongamos los dos principios en práctica con una ecuación muy tonta: $3x + 5 = 11$.

$3x + 5 - 5 = 11 - 5$ Para dejar la x sola, restamos 5 a ambos lados.

$3x = 6$ Ahora tenemos que deshacernos del 3.

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$ Dividimos ambos miembros entre 3.

$x = 2$ Y ya está.

¿Os dais ahora cuenta de dónde viene la regla de «pasar restando lo que está sumando» y «pasar dividiendo lo que está multiplicando»? No vamos a engañar a nadie. No es tan fácil. Resolver ecuaciones es un arte muy truculento, y recomiendo a todos hacerse una pequeña lista de trucos. Pero recordad que, llueva o nieve, haga sol o frío, gane o pierda el Atleti, los dos principios antedichos sirven siempre.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

Como el movimiento se demuestra andando, vamos a dar un par de ejemplos de resolución de ecuaciones. Después viene una lista de ejercicios con solución para que practiquéis.

- Primer ejemplo: $\frac{x-3}{2} = \frac{3x-9}{4}$.

Quitamos denominadores multiplicando en cruz: $4(x-3) = 2(3x-9)$.

Simplificamos cada miembro: $4x - 12 = 6x - 18$.

Llevamos las x a la derecha: $-12 + 18 = 6x - 4x$.

Simplificamos: $6 = 2x$.

Paso final: $x = \frac{6}{2} = 3$.

Compruebo: $\frac{3-3}{2} = \frac{3 \cdot 3 - 9}{4} \rightarrow \frac{0}{2} = \frac{0}{4} \rightarrow 0 = 0$

- Segundo ejemplo: $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.

Elevo ambos miembros al cuadrado: $x^2 + 9 = 25$.

Llevo los números a la derecha: $x^2 = 25 - 9 = 16$.

Tomo la raíz cuadrada a ambos lados: $x^2 = \sqrt{16}$.

Simplifico: $x = 4$.

Compruebo: $\sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

- Tercer ejemplo (asusta, pero no es para tanto): $\frac{2z^2 + z + 4}{z^2 + z + 1} = 2$.

Pasa el denominador al otro lado: $2z^2 + z + 4 = 2(z^2 + z + 1)$.

Simplifica el segundo miembro: $2z^2 + z + 4 = 2z^2 + 2z + 2$.

Pasa todas las x a la izquierda: $2z^2 + z - 2z^2 - 2z = 2 - 4$.

¡Las z^2 se van!: $-z = -2$.

Los signos $-$ se me van: $z = 2$.

Compruebo: $\frac{2 \cdot 2^2 + 2 + 4}{2^2 + 2 + 1} = \frac{14}{7} = 2$.

Una serie de consejos útiles. Todos son algo tontos, pero merece la pena tenerlos en la cabeza:

- Cuando no estés seguro/a de que algo se puede hacer, ponte un ejemplo con números.
- ¡Comprueba siempre el resultado!
- Cuando pases un denominador al otro lado multiplicando, ponle siempre entre paréntesis (como en el último ejemplo).

- Recuerda el cuadrado de la suma y de la diferencia: $(x \pm a)^2 = x^2 + a^2 \pm 2ax$. Esta fórmula vale su peso en oro (vale... pesa poquito).

Ahora, manos a la obra. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3x-4}{4x} = \frac{1}{2}$$

(R. $x = 4$)

$$\sqrt{v^2 - 9} = v - 1$$

(R. $v = 5$)

$$(z-3)^2 = (z-2)^2 - 5$$

(R. $z = 5$)

$$10^{2x-4} = 100$$

(R. $x = 3$)

Ojo. El hecho de que hayas podido resolver todas las ecuaciones anteriores no quiere decir que todas se puedan resolver. Por ejemplo, $x^2 = -1$ no tiene solución real, ya que ningún número elevado al cuadrado da negativo (es como la novia de primo Alfredo, que es imaginaria...).

MÉTODOS GRÁFICOS DE SOLUCIÓN.

Toda ecuación se puede resolver con un dibujo. El truco, obviamente, es dibujar la cosa apropiada. Tomemos un ejemplo difícil de resolver de otra forma. Por ejemplo,

$$\sqrt{x^2 + 9} - 2 = \sqrt{x^2 - 7}$$

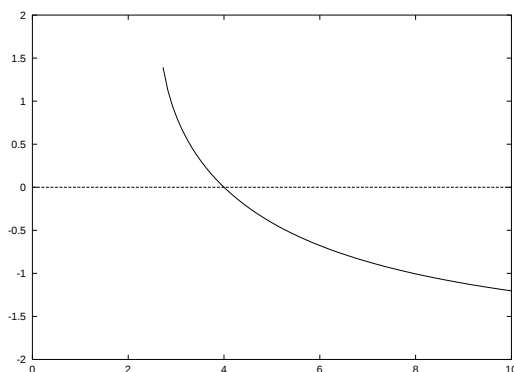
tiene como solución¹ $x = 4$ (compruébalo). Ahora hacemos lo siguiente: pasamos todo al lado de la izquierda y dejamos un hermoso cero a la derecha:

$$\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} - 2 = 0$$

Ahora podemos (calculadora en mano) tomar algunos valores de x y calcular cuánto vale el miembro de la izquierda. Por ejemplo, tomaremos los valores $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 3'5$, $x = 5$ y $x = 6$.

x	0	2	3	3'5	5	6
	—	—	0'828	0'318	-0'412	-0'677

¿Por qué no hemos puesto ningún valor bajo $x = 0$ y $x = 2$? Porque había que calcular la raíz cuadrada de un número negativo, y eso no se puede hacer. Intentamos dibujar la función con los números que tenemos. Nos queda algo así (vale, la mía está hecha por ordenador, lo admito):



Pero la ecuación se resuelve cuando el miembro de la izquierda es igual a cero. Es decir: cuando la curva que estamos dibujando *cruza* el eje de las x . ¿Ves a qué altura lo cruza? Justo: a la altura de $x = 4$. Así se obtiene la solución de manera gráfica.

Ahora intenta tú hallar la solución de las siguientes ecuaciones de manera gráfica. Recuerda siempre que debes comprobar la solución. La mayoría de los casos la solución no es un número entero.

¹ Tiene otra, pero ahora no nos interesa. ¿Podrías averiguarla?

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x = 2\sqrt{x} \qquad t^3 - 5t^2 - 10 = 0$$

Cuando tengamos bien comprendido este punto, visitaremos el aula de informática para aprender cómo el ordenador nos puede ayudar con estas historias.

¿PARA QUÉ NARICES SIRVEN LAS ECUACIONES?

Hay muchos trucos de adivinación de números que se parecen a éste: «piensa un número, multiplícalo por 4, súmale 8, divide entre 2 y resta el número que pensaste, ¿qué te queda?» Entonces, mágicamente, el matemago/a adivina el número. ¿Cómo lo hace? Fácil. Veámoslo siguiendo el truco despacito:

Piensa un número	x
Multiplica por 4	$4x$
Súmale 8	$4x + 8$
Divide entre 2	$\frac{4x + 8}{2} = 2x + 4$
Resta el número que pensaste	$2x + 4 - x = x + 4$

A nadie sorprende ya el truco: el/la matemago/a sólo tuvo que restar 4 al resultado... Lo malo de este truco es que es muy simple y no se puede utilizar muchas veces (te pillan). ¿Podrías tú inventar una versión más ingeniosa...?

En realidad, para ningún problema *es imprescindible* el uso del álgebra (es decir: poner letras para representar los números que no conocemos). Si fuéramos todos/as super-listos/as, no nos haría falta. Pero no lo somos, así que vamos allá. Vamos a procurar poner sólo problemas que resulten o realistas o divertidos (o las dos cosas). Los primeros ejemplos los resolveremos del todo. Los demás quedan para vosotros/as.

1.- Un barman algo transfullero suele mezclar el vodka con queroseno, que es más barato. El vodka de verdad cuesta 1200 pts/litro, mientras que el queroseno sale a 600 pts/litro. ¿Cuánto tiene que echar de cada si la mezcla debe costarle a él 800 pts/litro?

Vamos primero a entender bien el problema. Si echa mucho vodka, el precio se acercará a 1200 pts/litro, y si echa mucho queroseno, se acercará a las 600 pts/litro. Si echa mitad y mitad, será de $(1200+600)/2 = 900$ pts/litro.

Bueno. Cojamos un litro de esa asquerosa mezcla. Llamemos x a los litros de vodka auténtico (x tiene que ser menor que uno, claro). Entonces, lo que echará de vodka es $1 - x$ (lo que falta hasta el litro). Ambos números tienen que ser de la forma 0'....

El precio del vodka que ha echado es $1200x$, y el precio del queroseno que ha echado es $600(1 - x)$ (nota el paréntesis). El precio total del litro de pútrida mezcla tiene que ser 800 pts, así que tenemos la ecuación:

$$1200x + 600(1 - x) = 800$$

Resolvemos la ecuación (no en detalle, claro) y queda $x = 1/3$. Es decir: la mezcla explosiva lleva un tercio de litro de vodka y dos tercios de queroseno. Pues vaya.

2.- Un traficante de costo en mal estado (el costo, no el traficante) huye de Madrid en un coche robado a 150 km/h. Un coche de los geos sale de Madrid dos horas después a 200 km/h para pillarle. El traficante tiene que llegar a Gibraltar, que está a 700 km de Madrid, donde los de las matuteras le protegen. ¿Se salvará?

Cuando los geos salen de Madrid, el traficante ha recorrido ya $150 \times 2 = 300$ km, y le faltan 400 por recorrer. Por tanto, es posible que le pillen. Tenemos que averiguar a qué distancia de Madrid le cogerían si

la carretera no se acabara nunca. Si esa distancia es mayor de 700 km, es que no le pillan. ¿Vale?

Sea t el tiempo que ha pasado desde que los geos salieron. ¿A qué distancia está cada uno de Madrid?

– Los geos están a $200t$ kilómetros.

– El traficante está a $300 + 150t$ kilómetros (la ventaja más lo que recorre después).

Cuando le pillen (si es que le pillan), ambos tienen que estar a la misma distancia de Madrid. Por tanto:

$$200t = 300 + 150t$$

La ecuación nos da $t = 6$ horas. Los geos están a esa hora a $200 \times 6 = 1200$ km de Madrid, así que el tipejo se salva. ¿Se pillan? (No, claro).

Ahora viene una lista de problemas que se resuelven utilizando ecuaciones. Lo más importante (y difícil) es el planteamiento, pero *nunca te contentes* con él. Es importante resolver la ecuación y comprobar que el resultado es *creíble* en términos del enunciado del problema. Así, por ejemplo, si te da que Pepito tiene 42.000 años más que su padre... sospecha.

1.- María de las Angustias va por la carretera al encuentro de su novio Federico, que viene a su vez a verla a ella. El coche de ella corre a 120 km/h, mientras que él (menos ansioso) va a 50 km/h. Si la distancia entre sus pueblos es de 200 km, ¿dónde se encontrarán?

2.- Son las tres en punto. ¿Cuándo será la primera vez que coincidan ambas agujas del reloj? ¿Podrías averiguar todas las horas a lo largo del día en las que coinciden las agujas?

3.- Cuando viajé al Chikitistán me encontré que había dos casas de cambio en el aeropuerto. Una me pagaba 20 chikitos (la moneda de allí) por cada euro, pero me pedía 100 euros de comisión en cualquier operación. La otra me pagaba 15 chikitos por euro. ¿Cuál me conviene?

4.- ¿Se te ocurre alguna situación de la vida real que pueda requerir el uso de una ecuación?

DESPEJAR SIN NÚMEROS.

En muchos casos se nos da una fórmula en la que aparecen varias letras y se nos pide que despejemos una de ellas. La cosa es igual que antes, aunque parezca más complicada. Tomemos, p.ej., la fórmula

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

que sale en física. Queremos despejar la t . ¿Cómo se hace? Igual que siempre. Pasamos el 2 multiplicando y la a dividiendo: $2as = t^2$ y ahora tomamos la raíz cuadrada de los dos lados:

$$\sqrt{2as} = t$$

Prueba ahora tú con los siguientes ejemplos:

$$\sqrt{v^2 + w^2} = N$$

Despeja la v y luego la w .

$$\sqrt{v^2 + w^2} = 2vt$$

Despeja la v .

$$5^b = c$$

Despeja la b .

$$A = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Despeja la x .

2.- Sistemas de ecuaciones.

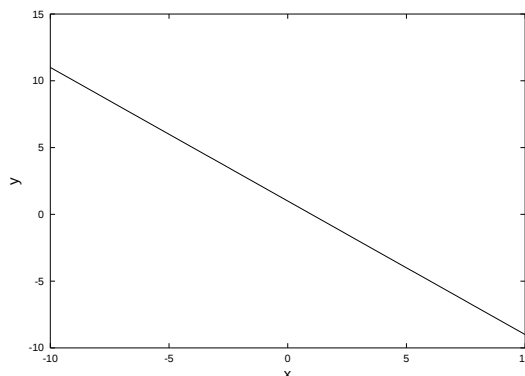
En algunos casos no hay una incógnita, sino varias. Solemos llamarlas x , y , z ... Si nos dan una ecuación en la que aparecen dos incógnitas al tiempo, podemos decir con casi total seguridad que no hay una única solución, sino muchas. Por ejemplo:

$$x + y = 1$$

tiene como solución, p.ej., $x = 1$ e $y = 0$. Pero también vale $x = 0'5$ e $y = 0'5$. Seguro que a ti se te ocurren más.

Si tomamos todas las soluciones de una ecuación en dos variables y las consideramos como puntos, obtenemos (por lo general) una línea (recta o curva, depende) en el plano. Así, por ejemplo, a la derecha tenemos el conjunto de puntos dados por $x + y = 1$.

Nota que se trata de una línea recta. En realidad, a la hora de dibujarla nos interesa mucho más «despejar la y »: $y = 1 - x$. Hay dos razones. La primera es que resulta más fácil dar valores. La segunda es que es «más fácil de leer».



Nos explicamos. Toda ecuación de la forma $y = ax + b$ (con a y b cualquier valor) tiene una interpretación sencilla. ¿Qué ocurre cuando la x vale 0? Pues que la y vale b . Por eso la b se llama el «corte con la ordenada». Si la x vale 1, la y vale $a + b$. Eso significa que, al incrementarse la x en 1, la y se incrementa en a . El parámetro a viene a ser la «pendiente» de la recta.

Ejemplos: la recta $y = 2x - 4$ tiene pendiente 2. Eso significa que, cuando la x aumenta 1, la y aumenta 2. El corte con la ordenada es -4 . Eso significa que la recta corta el eje Y a la altura del -4 . Prueba a dibujar ahora la gráfica.

Unas cuantas conclusiones:

a) Si la pendiente a es positiva, la recta va «hacia arriba», mientras que si a es negativa, la recta «baja». Si la pendiente es cero, la recta es horizontal.

b) Si dos rectas tienen la misma pendiente, son paralelas. Así, por ejemplo, $y = 2x - 3$ e $y = 2x - 4$ no se cortan nunca.

En términos geométricos, si nos piden resolver un sistema de dos ecuaciones, tenemos que encontrar un punto que pertenezca a las dos líneas. Gráficamente, se puede hacer encontrando el punto de corte.

Algebraicamente, hay un truco para solucionar sistemas de ecuaciones que me permite, por el mismo precio, atacar sistemas de 2, 3 ó más ecuaciones. Se trata del «*método matricial*».

Tomemos por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Metemos todos los coeficientes en una *matriz*, que no es más (o casi) que una caja de números:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

No es que las matrices resuelvan el sistema solas, sino que resulta más fácil manipular el sistema así (porque escribes menos, básicamente). Hay dos operaciones que se pueden hacer sobre las *filas* de la matriz (filas, o sea, verticales):

- a) Se puede multiplicar una fila entera por un mismo número.
 b) A una fila se le puede sumar o restar otra.

Vamos a resolver el sistema de esta forma: multiplicamos la primera fila por 2 y se lo restamos a la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 4 \\ 2 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 8 \\ 2 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 8 \\ 0 & -3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz original   Restamos la primera fila a la segunda

Multiplicamos la primera fila por dos

¿Qué se hace ahora? La segunda ecuación es muy sencilla:

$$-3y = -3 \quad \longrightarrow \quad y = 1$$

Metemos el valor de y en la primera ecuación y queda:

$$2x + 2 \cdot 1 = 8 \quad \longrightarrow \quad x = 3$$

Ya tenemos la solución: $x = 3$, $y = 1$. Comprobamos que la solución es válida en las ecuaciones iniciales: $3 + 1 = 4$ y $6 - 1 = 5$. Correcto.

Resuelve de la misma forma:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 4y = 10 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Parece que el método matricial no es especialmente más corto... Pero es que gana toda su potencia en el caso de más de dos ecuaciones.

La Ecuación de Segundo Grado.

ÍNDICE.

- 1.- Un problema con suma y producto.
- 2.- La solución de la ecuación de segundo grado.
- 3.- La parábola.

1.- UN PROBLEMA CON SUMA Y PRODUCTO.

Cuentan las crónicas de un labriego que tenía un hermoso campo rectangular en el que plantó repollos. Plantaba un repollo por cada yarda cuadrada porque así le crecían más jugosas, y recogió 24 repollos. Rodeó el campo con chopos, separados una yarda, y necesitó 20 chopos. ¿Cómo era de grande el campo?

El problema puede resolverse a ojo de buen cubero (¿cuánto mide el campo?). Pero vamos a suponer que somos cortitos y lo haremos por el método lento. Las ventajas las veremos al final.

El problema viene a decir que el área del campo es 24 (yardas cuadradas, sea lo que sea eso) y el perímetro 20 (yardas). Como el campo es rectangular, llamamos x al ancho e y al largo del campo. El perímetro será $2x + 2y$ y el área es xy . Así:

$$\begin{cases} xy = 24 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

Notad que este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas *no* puede resolverse por las técnicas matriciales, porque la primera ecuación contiene el producto xy . Tendremos que recurrir a los viejos métodos.

Tomamos la segunda ecuación y la simplificamos: $x + y = 10$. Ahora despejamos (por ejemplo) la y : $y = 10 - x$. Metemos esto en la primera ecuación ($xy = 24$):

$$x(10 - x) = 24$$

Resolvemos el paréntesis (x por 10 *menos* x por x):

$$10x - x^2 = 24 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

Esta ecuación tiene una x^2 , así que no se puede resolver a lo loco. Se llama una *ecuación de segundo grado*. Fijémonos despacio en ella. Estamos buscando un par de números cuyo producto es 24 y cuya suma es 10 (la segunda ecuación simplificada). Y nos aparece la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$. ¿Casualidad? Veamos.

Supongamos que queremos una ecuación que tenga solución 2. La más simple es $x = 2$, o bien $x - 2 = 0$. Ahora supongamos que queremos que la ecuación tenga dos soluciones: 2 y 5. Entonces podemos probar con

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

¿Por qué? Fácil. Si $x = 2$ entonces el primer término del producto es nulo. Si $x = 5$, lo es el segundo. Da igual cuál sea el valor del otro paréntesis, en los dos casos el producto total es cero. ¿Se ve?

Ahora vamos a hacer el producto $(x - 2)(x - 5)$ en detalle. Acordaos: todos con todos:

$$x^2 - 2x - 5x + 2 \cdot 5 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 7x + 10$$

Comenzamos a pensar que no era casualidad. Pongamos letras en lugar de números. La ecuación que tiene por soluciones a y b es:

$$(x - a)(x - b) = 0$$

Por tanto,

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

Demostrado: una ecuación de la forma $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene por soluciones los dos números cuya suma es 5 y cuyo producto es 6. ¿Sabes cuáles son? ¿Podrías comprobar que es cierto?



Ejercicios:

- 1.- Escribe una ecuación cuyas soluciones sean 4 y 2 y otra en la que las soluciones sean 4 y -2 .
- 2.- ¿Qué puedes decir sobre las soluciones de $x^2 - 7x - 12 = 0$ tan sólo echando un vistazo a los signos de los términos?

- 3.- Prueba a escribir una ecuación que tenga por soluciones 1, 2 y 3. Intenta poner letras en lugar de números. ¿Qué conclusiones sacas?

2.- LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO.

Hay muchas maneras de encontrar la solución de la ecuación de segundo grado. Vamos a daros la más sencilla y elegante (pa chulos, nosotros).

Primero tenemos que recordar (seguro que os las sabéis) el cuadrado de la suma y el de la diferencia:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

De aquí podemos sacar una fórmula que también es muy útil. Si restamos el cuadrado de la suma y el de la resta tenemos:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [a^2 + b^2 + 2ab] - [a^2 + b^2 - 2ab] = 2ab - (-2ab) = 4ab$$

¡Qué fácil! ¿A que sí? Cambiando cosas de orden tenemos:

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

Por tanto, para obtener el cuadrado de la resta, tomamos el cuadrado de la suma y le restamos cuatro veces el producto de los dos números. Pero... ¿para qué narices sirve esto?

Pues tomemos el problema de antes. Tenemos dos números cuya suma es 10. Por tanto, el cuadrado de la suma de los dos números es 100, ¿no? Pero el producto es 24, así que aplicamos la fórmula de antes:

«El cuadrado de la resta es igual al cuadrado de la suma menos cuatro veces el producto»
y tenemos que el cuadrado de la resta es

$$(a - b)^2 = 100 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 = 4$$

La resta de los dos números es $\sqrt{4}$, es decir: puede ser +2 ó -2. Ya estamos a punto de obtener nuestra solución.

Tomemos la suma y la resta de los dos números. ¿Qué tengo?

$$(a + b) + (a - b) = 2a$$

¡El doble de una de las soluciones! Ya lo tenemos. Tomemos como resta el valor +2. La «suma» más la «resta» me da:

$$10 + 2 = 12$$

Así, 12 es el doble de una de las soluciones: 6 ¡Chanánnnn!

¿Y la otra? Tomemos la «otra posible resta»: -2. Entonces «suma» más «resta» es:

$$10 + (-2) = 8$$

Ahora la otra solución es la mitad de ese número: $8/2 = 4$. Precioso, ¿a que sí?

Comprobar: $6 + 4 = 10$ y $6 \cdot 4 = 24$. Como queríamos demostrar. (¿A que mola?)



Ahora prueba tú. Encuentra, de la misma manera, la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ahora vamos a trabajarnos la *demonstración* general para cualquier ecuación. Sea una ecuación de segundo grado cualquiera $ax^2 + bx + c = 0$. Dividimos todo por a para tener una ecuación como las nuestras:

$$x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$$

Es decir: la suma es $-(b/a)$ y el producto, (c/a) . El cuadrado de la suma es (b^2/a^2) (el signo se va). Le resto cuatro veces el producto para tener el cuadrado de la resta:

$$\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{ca}{a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

Por tanto, la resta valdrá lo que valga la raíz cuadrada de eso:

$$\text{Resta} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

Ahora sumamos la «suma» y la «resta»:

$$\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

Esto lo tenemos que dividir por dos y tenemos la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¡Chanánnnn! Ya está.



Para celebrarlo, nos tomamos unas cañas y resolvemos unas cuantas ecuaciones (¡alegría!):

- 1.- Resuelve: $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x^2 + 10x - 25 = 0$ (para coger onda).
- 2.- La suma de dos números es 15 y el producto es 56. ¿Cuáles son esos números?
- 3.- La resta de dos números es 2 y el producto es 35. ¿Cuáles son esos números?
- 4.- Resuelve (a simple vista no son ecuaciones de segundo grado, pero puedes convertirlas en ellas con algo de cuidado): $x + x^{-1} = 2$, $2^x + 2^{2x} = 20$, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

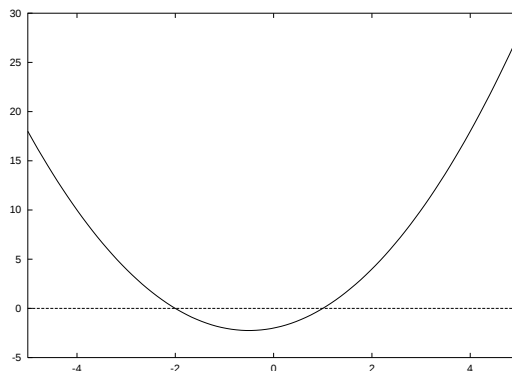


FIGURA 1. La parábola dada por la ecuación $y = x^2 + x - 2$.

3.- LA PARÁBOLA.

En aquellos días dijo Jesús a sus discípulos: « $y = x^2 - 3x + 2$ ». Pedro dijo: «Señor, no te entiendo» y Jesús respondió: «Claro: he dicho una parábola». (Evangelio según San Pitágoras, cap. 3, vers. 14.)

La parábola no es más que la curva que sale al «dibujar una ecuación de segundo grado», es decir, una función del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Los puntos de corte de la parábola con el eje x son las dos soluciones de la ecuación de 2 grado correspondiente. Normal.

Por ejemplo, tomemos la función $y = x^2 + x - 2$ (averigua las soluciones) y la dibujamos como toda la vida:

La línea recta señalada es el eje x . ¿Ves los puntos de corte? Son el $x = -2$ y $x = 1$. ¿Te salió bien la solución de la ecuación? Seguro que sí.

En realidad la «figura» de la parábola no viene de la ecuación, sino al revés. La parábola se definió antiguamente (hace unos 18 siglos, poco más o menos) como la curva que salía al cortar un cono con un plano de determinada forma. Si el corte es «muy horizontal» (estando el cono vertical, claro), cortas a todo el cono y tienes una curva cerrada (que se llama *elipse*). Si haces un corte «muy vertical» entonces la curva es abierta y se llama *hipérbola*. El caso *límite* entre los dos es el que conocemos como parábola. Pero, con franqueza, esto no nos sirve de mucho ahora mismo.



Ejercicios:

- 1.- Un poco de acción ahora. La parábola puede ser «hacia arriba» (una sonrisa) o «hacia abajo» (una cara enfadada). ¿Podrías averiguar cuándo es cada cual?
- 2.- Una pregunta más interesante y algo más difícil. Fíjate en el dibujo de antes. La parábola siempre tiene un «vértice», que es el punto más bajo (o más alto). ¿Cómo podemos averiguarlo sin dibujar la ecuación? Te doy una pista: la parábola es siempre *simétrica*.
- 3.- (Sólo si has hecho el ejercicio anterior) Una parábola tiene el vértice en el punto $(1, 0)$ y también pasa por el punto $(0, -1)$. ¿Sabrías dar su ecuación?