La Ecuación de Segundo Grado.

1. Un problema con suma y producto.

Cuentan las crónicas de un labriego que tenía un hermoso campo rectangular en el que plantó repollos. Plantaba un repollo por cada yarda cuadrada porque así le crecían más jugosas, y recogió 24 repollos. Rodeó el campo con chopos, separados una yarda, y necesitó 20 chopos. ¿Cómo era de grande el campo?

El problema puede resolverse a ojo de buen cubero (¿cuánto mide el campo?). Pero vamos a suponer que somos cortitos y lo haremos por el método lento. Las ventajas las veremos al final.

El problema viene a decir que el área del campo es 24 (yardas cuadradas, sea lo que sea eso) y el perímetro 20 (yardas). Como el campo es rectangular, llamamos x al ancho e y al largo del campo. El perímetro será $2x + 2y$ y el área es xy. Así:

$$\begin{cases} xy = 24 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$$

Notad que este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas *no* puede resolverse por las técnicas matriciales, porque la primera ecuación contiene el producto xy. Tendremos que recurrir a los viejos métodos.

Tomamos la segunda ecuación y la simplificamos: $x + y = 10$. Ahora despejamos (por ejemplo) la y: $y = 10 - x$. Metemos esto en la primera ecuación ($xy = 24$):

$$x(10 - x) = 24$$

Resolvemos el paréntesis (x por 10 *menos* x por x):

$$10x - x^2 = 24 \qquad \longrightarrow \qquad x^2 - 10x + 24 = 0$$

Esta ecuación tiene una x^2, así que no se puede resolver a lo loco. Se llama una *ecuación de segundo grado*. Fijémonos despacio en ella. Estamos buscando un par de números cuyo producto es 24 y cuya suma es 10 (la segunda ecuación simplificada). Y nos aparece la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$. ¿Casualidad? Veamos.

Supongamos que queremos una ecuación que tenga solución 2. La más simple es $x = 2$, o bien $x - 2 = 0$. Ahora supongamos que queremos que la ecuación tenga dos soluciones: 2 y 5. Entonces podemos probar con

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

¿Por qué? Fácil. Si $x = 2$ entonces el primer término del producto es nulo. Si $x = 5$, lo es el segundo. Da igual cuál sea el valor del otro paréntesis, en los dos casos el producto total es cero. ¿Se ve?

Ahora vamos a hacer el producto $(x-2)(x-5)$ en detalle. Acordaos: todos con todos:

$$x^2 - 2x - 5x + 2 \cdot 5 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - 7x + 10$$

Comenzamos a pensar que no era casualidad. Pongamos letras en lugar de números. La ecuación que tiene por soluciones a y b es:

$$(x - a)(x - b) = 0$$

Por tanto,

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

Demostrado: una ecuación de la forma $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene por soluciones los dos números cuya suma es 5 y cuyo producto es 6. ¿Sabes cuáles son? ¿Podrías comprobar que es cierto?

E1. Escribe una ecuación cuyas soluciones sean 4 y 2 y otra en la que las soluciones sean 4 y −2.

E2. ¿Qué puedes decir sobre las soluciones de $x^2 - 7x - 12 = 0$ tan sólo echando un vistazo a los signos de los términos?

E3. Prueba a escribir una ecuación que tenga por soluciones 1, 2 y 3.

E4. Obtén una ecuación que tenga tres soluciones: $x = a$, $x = b$ y $x = c$. Obtén todas las conclusiones que puedas.

2. La Solución de la Ecuación de Segundo Grado.

Hay muchas maneras de encontrar la solución de la ecuación de segundo grado. Vamos a daros la más sencilla y elegante (pa chulos, nosotros).

Primero tenemos que recordar (seguro que os las sabéis) el cuadrado de la suma y el de la diferencia:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

De aquí podemos sacar una fórmula que también es muy útil. Si restamos el cuadrado de la suma y el de la resta tenemos:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [a^2+b^2+2ab] - [a^2+b^2-2ab] = 2ab - (-2ab) = 4ab$$

¡Qué fácil! ¿A que sí? Cambiando cosas de orden tenemos:

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

Por tanto, para obtener el cuadrado de la resta, tomamos el cuadrado de la suma y le restamos cuatro veces el producto de los dos números. Pero... ¿para qué narices sirve esto?

Pues tomemos el problema de antes. Tenemos dos números cuya suma es 10. Por tanto, el cuadrado de la suma de los dos números es 100, ¿no? Pero el producto es 24, así que aplicamos la fórmula de antes:

«El cuadrado de la resta es igual al cuadrado de la suma menos cuatro veces el producto»

y tenemos que el cuadrado de la resta es

$$(a-b)^2 = 100 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 = 4$$

La resta de los dos números es $\sqrt{4}$, es decir: puede ser $+2$ ó -2. Ya estamos a punto de obtener nuestra solución.

Tomemos la suma y la resta de los dos números. ¿Qué tengo?

$$(a+b) + (a-b) = 2a$$

¡El doble de una de las soluciones! Ya lo tenemos. Tomemos como resta el valor $+2$. La «suma» más la «resta» me da:

$$10 + 2 = 12$$

Así, 12 es el doble de una de las soluciones: 6 ¡Chanánnnn!

¿Y la otra? Tomemos la «otra posible resta»: -2. Entonces «suma» más «resta» es:

$$10 + (-2) = 8$$

Ahora la otra solución es la mitad de ese número: $8/2 = 4$. Precioso, ¿a que sí?

Comprobare: $6+4=10$ y $6 \cdot 4 = 24$. Como queríamos demostrar. (¿A que mola?)

E5. Ahora prueba tú. Encuentra, de la misma manera, la solución de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ahora vamos a trabajarnos la *demostración* general para cualquier ecuación. Sea una ecuación de segundo grado cualquiera $ax^2+bx+c=0$. Dividimos todo por a para tener una ecuación como las nuestras:

$$x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$$

Es decir: la suma es $-(b/a)$ y el producto, (c/a). El cuadrado de la suma es (b^2/a^2) (el signo se va). Le resto cuatro veces el producto para tener el cuadrado de la resta:

$$\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{ca}{a^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2}$$

Por tanto, la resta valdrá lo que valga la raíz cuadrada de eso:

$$\text{Resta} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

Ahora sumamos la «suma» y la «resta»:

$$\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

Esto lo tenemos que dividir por dos y tenemos la solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

¡Chanánnnn! Ya está.

Para celebrarlo, nos tomamos unas cañas y resolvemos unas cuantas ecuaciones (¡alegría!):

E6. Resuelve: $x^2 - 7x + 10 = 0$, $\quad x^2 + 10x - 25 = 0$ (para coger onda).

E7. La suma de dos números es 15 y el producto es 56. ¿Cuáles son esos números?

E8. La resta de dos números es 2 y el producto es 35. ¿Cuáles son esos números?

E9. Resuelve (a simple vista no son ecuaciones de segundo grado, pero puedes convertirlas en ellas con algo de cuidado): $x + x^{-1} = 2$, $\quad 2^x + 2^{2x} = 20$, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

E10. Un grupo de zampabollos se quiere comer 60 bollos. Cuando ya se estaban relamiendo entraron otros tres zampabollos, y uno de ellos exclamó: «¡Oh, no! Ahora tocaremos a uno menos...» ¿Cuántos zampabollos había?

E11. Un sufrido labriego tiene bueyes que comen la misma cantidad de pienso todos los días. Si vendiese 15 bueyes, el pienso le duraría 3 días más, mientras que si comprase 25 bueyes el pienso le duraría 3 días menos. ¿Cuántos bueyes tiene?

E12. Dos grifos llenan juntos un depósito en 12 minutos. Uno de ellos, solo, tarda diez minutos menos que el otro en llenar el mismo depósito. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?

E13. Calcula, sin dibujar y sin usar ninguna fórmula enlatada, dónde estará el vértice de la parábola $y = x^2 - 5x + 6$.

E14. Calcula la fórmula general para la posición del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.