Funciones.

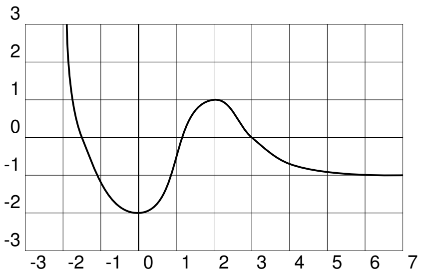
Una **función** es una «máquina» que nos devuelve un número al meter otro. Así, p.ej., «tomar el doble», «sacar la raíz cuadrada» «devolver 1 si el número es impar, y 0 en caso contrario» son funciones. Cualquier regla vale, aunque no sirva para nada. Una función no está obligada a aceptar cualquier número. Así, por ejemplo, la raíz cuadrada sólo acepta números positivos. En cambio, en seguro que jamás devolverá más de un número como respuesta.

Hay muchas maneras de especificar una función. Vamos a considerar tres: gráficamente (con un dibujo), en forma de tabla y analíticamente (con una fórmula).

Funciones en Forma de Gráfica.

Toda función se puede dibujar. Más aún: muchos dibujos en el plano se corresponden con funciones[1]

Vamos a tomar una gráfica y discutir conceptos a partir de ella.



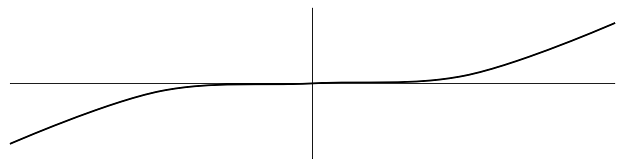
Esta figura no proviene de ninguna fórmula: está trazada «a mano». Pero aún sigue valiendo como regla para pasar de un número a otro. Llamemos f a la función. ¿Qué valor devuelve al pasarle el 3? Llamaremos a ese valor $f(3)$. Buscamos el 3 en el eje de las x (o de *abscisas*) y buscamos su altura en el eje y (o de *ordenadas*), que vale cero. Así que $f(3) = 0$.

Crecimiento: La región de crecimiento es aquélla en la que la función

[1] Esta idea, que parece tan simple, es relativamente moderna. No aparece hasta Fermat y Descartes, en el siglo XVII.

sube[2]. La opuesta es la región de decrecimiento. En nuestro caso, la región de crecimiento será $(0, 2)$. Abierto en los dos extremos porque, justo en el 0 y en el 2 ni crece ni decrece. En cambio, la región de decrecimiento será $(-2, 0) \cup (2, \infty)$. Una función que es siempre creciente o siempre decreciente se dice que es **monótona** (vamos, algo aburrida).

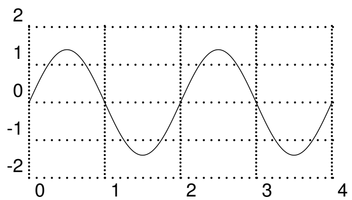
Puntos críticos: Son aquellos en los que la «pendiente» es cero: la función ni crece ni decrece. Hay varias posibilidades: el **máximo relativo**, que es lo alto de una colina, y el **mínimo relativo**, que es el fondo de un pozo. En nuestro ejemplo tenemos, respectivamente, $x = 2$ y $x = 0$. Hay una tercera posibilidad: el **punto silla**, que es un «repecho» como el que aparece en esta otra figura.



Concavidad / Convexidad: Si tomamos un tazón, la parte interna es cóncava, y la externa es convexa. Tomaremos el convenio de determinar si la figura es cóncava o convexa mirando *desde arriba*, si bien lo mejor es que digáis siempre desde qué lado estáis mirando la gráfica. Así, en nuestro ejemplo diremos que es cóncava (desde arriba) en la región $(-2, 1) \cup (3, \infty)$. Y es convexa en la región $(1, 3)$ (aprox.).

Puntos de inflexión: Son aquéllos en los que la función pasa de cóncava a convexa (o viceversa, claro). En nuestro ejemplo, $x = 1$ y $x = 3$.

E1. Especifica las regiones de crecimiento y decrecimiento, puntos críticos (con su tipo), concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función dada por la siguiente gráfica. ¿Tiene puntos silla?

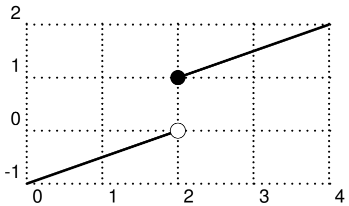


[2] Cuando avanzamos hacia la derecha, claro.

Q1. Observa que *no toda* curva dibujada sobre el plano se corresponde con la gráfica de una función. El hecho de que cada valor debe tener una única salida nos da una restricción. ¿Cuál es?

Una función es **continua** cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Los puntos en los que una función deja de ser continua se llaman (¡oh, sorpresa!) discontinuidades. Los tipos más importantes son:

Saltos: La función tiene un escalón brusco, como en la función del siguiente ejemplo:



En este caso, la función evaluada en $x = 2$ vale $f(2) = 1$. ¿Que cómo lo sabemos? El círculo relleno indica el valor que toma de verdad la función en ese punto. Obviamente, pueden estar los dos vacíos, señalando que la función no toma valor ninguno en ese punto, pero no pueden estar los dos rellenos.

Polos: En la figura 1, en $x = -2$, la función se va a ∞. La función no toma ningún valor en ese punto. Tenemos un polo cuando la función se escapa, tanto por arriba como por abajo.

Llamamos **dominio** al conjunto de valores de la x para los que existe función. En otras palabras: la región en x sobre la que hay curva. En el ejemplo de la figura 1, no hay función a la izquierda de $x = -2$, así que el dominio es $x \in (-2, \infty)$.

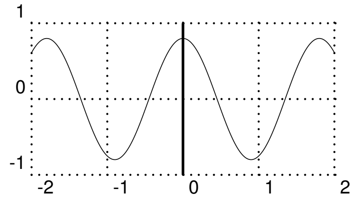
Recorrido: Es el conjunto de valores que puede tomar la y. Para hallarlo sobre la gráfica, mira cuáles son las «alturas» entre las que se mueve la función. En el ejemplo de la figura 1, la altura mínima es $y = -2$ (en el mínimo cuando $x = 0$), y no hay altura máxima. Por tanto, el recorrido es de nuevo $(-2, \infty)$.

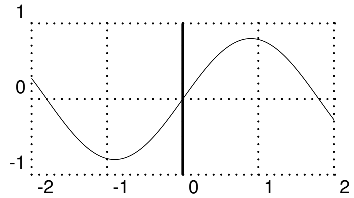
Otro ejemplo que puede ser más interesante es la función que tenía el salto. En ese caso, no hay altura inferior ni superior[3], pero hay un rango de alturas «prohibido», que es el $[0, 1)$ (cerrado en 0 porque ese valor *sí* está prohibido). Por tanto, el rango será $\mathbb{R} - [0, 1)$, o bien $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

[3] Suponiendo que la función siga hacia la izquierda y hacia la derecha en línea recta.

E2. Dibuja una función que tenga por dominio $(-4, -1) \cup (1, 4)$ y rango $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Simetría bajo reflexión: Observa las dos gráficas de la figura. De la función de la izquierda se dice que es **par**: es simétrica respecto al eje de las y. En cambio, la función de la derecha es **impar**: la parte negativa de las x es «opuesta» en signo a la parte positiva.





Q2. ¿Puede ser que el rango sea un solo número? ¿Y un par de números? ¿Y cinco números?

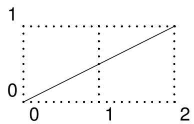
Q3. Una función tiene un salto de magnitud 1. ¿Es aún posible que su rango sea todo $\mathbb{R}$?

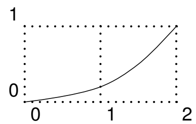
Q4. ¿Puede una función par tener por dominio $(-2, 3)$? ¿Y si fuera impar?

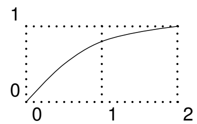
E3. Dibuja una función que sea par, cuyo rango sea $[0, 2]$ y cuyo dominio sea $(-3, 3)$.

E4. Dibuja aproximadamente gráficas que representen las siguientes situaciones: a) la altura de una pelota rebotando en función del tiempo, b) una carrera de relevos, c) la altura de una barquilla en una noria, d) el tráfico a lo largo de un día en una calle cualquiera.

E5. Observa las siguientes gráficas que reflejan cómo sube el nivel de agua en unas vasijas que están siendo llenadas a ritmo constante. Dibuja una vasija posible para cada una de las gráficas.







Dibuja alguna vasija de forma alternativa junto con su curva de llenado.

Q5. Si tomamos los datos de altura y peso de toda la gente del instituto podemos dibujar una «nube de puntos» en un papel, pero no es una función.

¿Se te ocurre cómo obtener una función a partir de esos valores? ¿Qué función crees que saldrá?

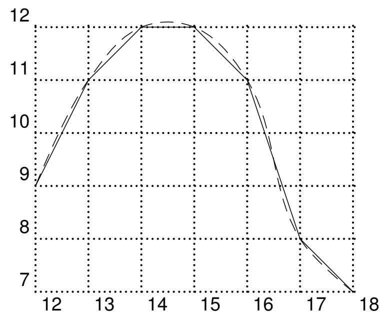
Q6. La cantidad de dinero que recauda el Estado en función de la presión fiscal da lugar a una gráfica llamada la «curva de Laffer». Si la presión fiscal es nula, el Estado no recauda nada. Pero si la presión es del 100%, tampoco, porque nadie trabajará. ¿Qué forma crees que puede tener la gráfica? ¿Crees que corresponde a una función?

Funciones en Forma de Tabla.

Supongamos que medimos la temperatura en un lugar según va avanzando el día y obtenemos los valores

Hora	12	13	14	15	16	17	18
Temp (C)	9	11	12	12	11	8	7

Pasamos a representar una gráfica con ellos. ¿Cómo debemos hacerlo, como en la línea continua o como en la línea de puntos?



En realidad, habría infinitas maneras de unir mediante una línea continua los puntos. Nosotros vamos a hacerlo, en este curso, mediante líneas rectas. ¿Para qué puede servir?

Supongamos que nos preguntan por la temperatura que hacía a las $13:30$. Supongo que, a la vista de la gráfica, tod@s diréis que $11'5$C, ¿no? La verdad es que no es la única respuesta posible. La línea discontinua parece decir que la temperatura podría haber sido algo más alta.

El «asignar» valores para la función entre dos puntos que conocemos se llama **interpolar**. Suponer que la función es una línea recta entre los dos puntos es realizar una **interpolación lineal**.

Veamos el proceso. Supongamos que tenemos una función de la que sabemos que $f(1) = 0'2$ y $f(3) = 0'7$. Nos piden interpolar linealmente el valor de $f(1'4)$. ¿Cómo lo hacemos?

La x pasa del valor $x = 1$ al valor $x = 3$, así que podemos decir que «avanzo 2». Al mismo tiempo, paso de $y = 0'2$ a $y = 0'7$, por tanto, «subo $0'5$». Cuando avanzo 2, subo $0'5$. Pero ahora me piden calcular la y para $x = 1'4$. Eso quiere decir que avanzo $1'4 - 1 = 0'4$. ¿Cuánto subiré entonces? Hago una regla de tres:

$$\begin{array}{ccc} \text{Avanzo } 2 & \longrightarrow & \text{Subo } 0'5 \\ \text{Avanzo } 0'4 & \longrightarrow & \text{Subo ?} \end{array}$$

Por tanto, ? $= (0'4 \times 0'5)/2 = 0'1$. Así, si $f(1) = 0'2$, entonces $f(1'4) = 0'2 + 0'1 = 0'3$.

E6. Practica tú. Sabiendo que $f(1) = 2'1$ y $f(1'5) = 2'4$, calcula $f(1'2)$ y $f(1'3)$. Ten sentido común: ¡el resultado tiene que estar entre $2'1$ y $2'4$!

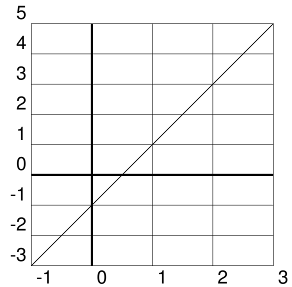
Si te preguntara por la temperatura a las $19:00$ te estaría pidiendo que **extrapolaras**: que obtuvieras valores fuera del rango que tenemos. Se trata de algo mucho más difícil. Hay que tener mucho ojo para predecir las tendencias futuras. Si no, todos ganaríamos a la Bolsa o a las quinielas... :-)

Funciones en Forma Analítica: Rectas y Polinomios.

Dar una función de forma analítica significa utilizar una «fórmula». Empezamos, por las más sencillas, por las **rectas**. Una recta siempre tiene por ecuación

$$f(x) = ax + b$$

donde a es la **pendiente** y b la **ordenada en el origen**. Veamos qué significa esto en un ejemplo. La figura representa la gráfica de $y = 2x - 1$.



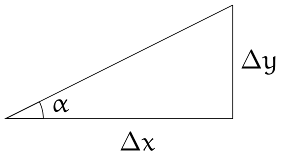
Si damos a x el valor 0, siempre obtendremos $y = b$. Por tanto, b es la altura a la que la recta corta al eje y (eje de ordenadas). Pero, ¿qué significa la pendiente? Es «lo que subo cuando avanzo uno». En la gráfica se ve, a ojo, que es 2. En general es a. La razón: si $x = 0$, la altura vale b, y si $x = 1$ vale $a + b$. Por tanto, al avanzar uno en el eje x, he subido a.

E7. Halla la ecuación de una recta que tenga pendiente -1 y pase por el punto $(2, 3)$.

E8. Halla la ecuación de la recta que pase por los puntos $(1, -2)$ y $(2, 4)$.

E9. Dada la recta $y = -x + 4$, halla una paralela a ella (es decir: una recta con la misma pendiente) que pase por el punto $(2, 3)$.

La pendiente es, por tanto, «lo que subo» (Δy –incremento en y) entre «lo que avanzo» (Δx –incremento en x), o bien, lo que avanzo por cada uno que subo:



$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$$

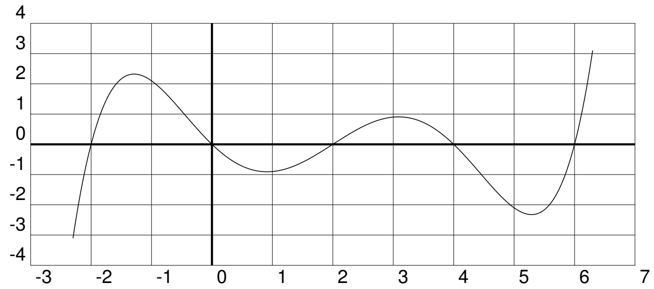
Ahora bien: lo que subo es un segmento vertical, y lo que avanzo un segmento horizontal. Por tanto, el cociente entre ellos es como el cociente entre dos catetos de un triángulo rectángulo: la pendiente me da la **tangente** del ángulo que forma la recta con la horizontal.

E10. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos $(0'5, 1'2)$ y $(1'3, 2'8)$. A partir de ahí, calcula el ángulo que forma la recta con la horizontal.

La siguiente función a estudiar es la **polinómica**, que es la suma de «monomios» en x, p.ej. $f(x) = x^5 - 3x^2 + 6$. El caso más sencillo es la parábola, que sólo tiene términos de grado menor o igual que 2.

E11. Encuentra una regla general para hallar el mínimo de una parábola genérica $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pista: recuerda que el vértice está a medio camino entre las dos soluciones.

El aspecto de una función polinómica depende del grado. Un polinomio de grado 5 tiene, *en general*, 5 soluciones. Por tanto, cruza el eje de las x cinco veces. Mira el dibujo del principio de la siguiente página para convencerte.



Eso significa que, si la función «viene» desde abajo (como en nuestro caso), se irá por arriba cuando el grado del polinomio sea **impar**. En caso de que sea par, se irá por donde ha venido.

E12. Considera el polinomio $P(x) = x(x-2)(x-4)$. Dibújalo *sin* realizar el producto de los binomios.

Q7. ¿Cuántos máximos puede tener, como máximo, un polinomio de grado N? ¿Y como mínimo?

Q8. También hay funciones «bidimensionales», en las que, en lugar de asignarle un valor a cada punto del eje x, se le asigne un valor a cada punto del plano xy. ¿Un ejemplo? La temperatura en cada punto de una placa, o la intensidad luminosa en cada punto de una fotografía B&N. Intenta imaginar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. ¿Tiene algún máximo o mínimo?

Traslación de funciones.

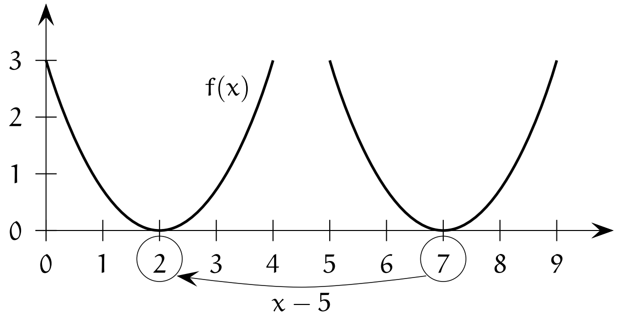
Supongamos que nos dan la expresión analítica (=fórmula) de una función y nos piden que averigüemos cómo debemos cambiarla para que la gráfica sea la misma, pero *trasladada*. La respuesta depende: ¿la traslación es vertical u horizontal?

Si es **vertical**, la cosa es bien fácil. Para trasladarla a unidades, suma a a la expresión: $f(x) \to f(x) + a$.

E13. Dibuja la «familia» de funciones $f_k(x) = 2x + k$ con $k \in \mathbb{N}$.

E14. ¿Qué aspecto tiene la familia $f_k(x) = x^2 + k$, con $k \in \mathbb{Z}$?

Si es **horizontal**, es algo más difícil. Supongamos que quieres trasladar una función 5 pasos a la derecha. Entonces, la nueva función en (p.ej.) $x = 7$ tendrá el mismo valor que la antigua en $x = 2$, ¿no? Echa un vistazo al dibujo



de la página siguiente.

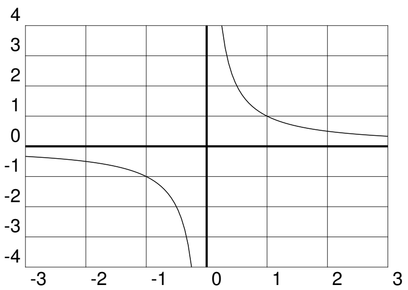
Así, para calcular la nueva función en x lo que hacemos es restar 5 a x y calcular *allí* la antigua $f(x)$: la nueva función es, por tanto, $f(x-5)$. En general, para trasladar a puntos a la derecha, escribimos $f(x-a)$.

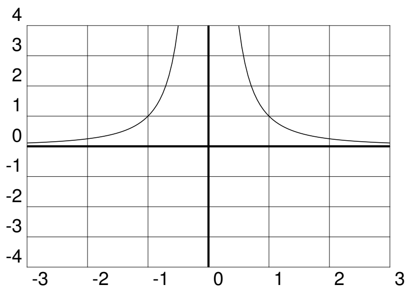
E15. Dibuja la gráfica de una función cualquiera $f(x)$ y luego dibuja (en los mismos ejes) $f(x)+3$, $f(x-2)$ y $f(x-2)+3$.

Q9. Sabiendo que la función $g(x)$ es creciente en la región $(-\infty,4)\cup(8,10)$, ¿qué podrías decir sobre la región de crecimiento de $g(x+4)-2$?

Funciones Racionales y Asíntotas.

Las funciones $f(x)=1/x$ y $g(x)=1/x^2$ tienen siempre un polo en $x=0$, pero hay una diferencia clave. Obsérvalas:

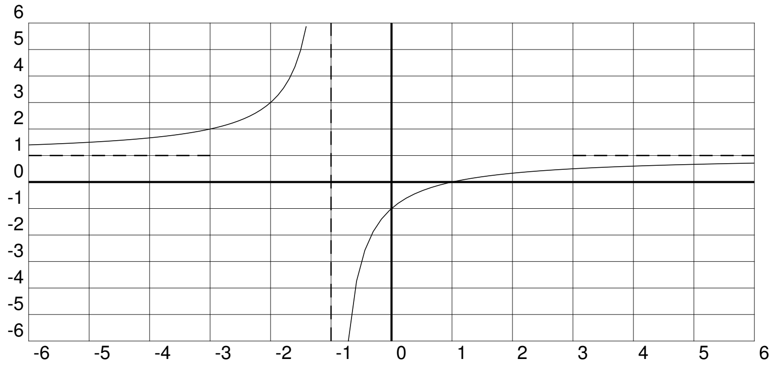




Para $1/x$ (que también se llama **hipérbola**) el signo es diferente a la izquierda y a la derecha de $x=0$, pero para $1/x^2$... ¡es el mismo! Por eso la segunda es siempre positiva.

E16. Dibuja aproximadamente $g_1(x)=1/(x-5)$, $g_2(x)=1/(x-5)^2$ y $g_3(x)=1/x+1/(x-5)$.

Una **función racional** es el cociente de dos polinomios. Sus ceros coincidirán con los del numerador y tendrá polos en los del denominador. Observa, por ejemplo, $f(x)=(x-1)/(x+1)$:



En este dibujo vemos que hay tres rectas especiales (marcadas con trazo discontinuo) a las que se va «pegando» la gráfica. Se llaman **asíntotas**. Una es vertical y está asociada al polo $x=-1$. Las otras dos son horizontales y son aún más divertidas: la función, cuando la x se va hacia infinito ($x\to\infty$), se va acercando cada vez más al valor 1. Lo mismo ocurre cuando $x\to-\infty$.

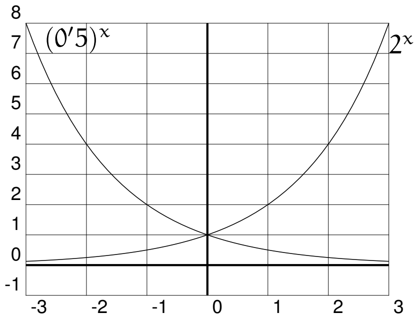
E17. Encuentra las asíntotas de la función $f(x)=x^2/(x-2)^2$.

E18. También hay asíntotas *oblicuas*, que no son ni horizontales ni verticales. Dibuja la función $f(x)=x/(x-1)$ dando valores y observa su comportamiento cuando $x\to\pm\infty$.

Función Exponencial y Logarítmica. Función Inversa.

Vamos a estudiar las funciones $f(x)=2^x$ y $g(x)=(0'5)^x$. En el primer caso, cuando la x se va haciendo grande el valor de la función crece muchísimo (p.ej., $f(5)=32$, $f(6)=64$...). En el segundo caso, ocurre al revés ($f(5)=1/32$, $f(6)=1/64$...). Observa la próxima figura.

E19. Una colonia de bacterias tiene 200 miembros en $t=0$ segundos, y se duplica cada 10 minutos. Averigua la función que nos da la población en función del tiempo.



En muchas ocasiones nos interesa averiguar la función que puede «*deshacer*» efecto de $f(x)$. Se dice esta función es **inversa** de la otra y se escribe $f^{-1}(x)$. Así, por ejemplo, la inversa de $g(x) = x + 2$ es $g^{-1}(x) = x - 2$, y la inversa de $h(x) = 3x$ es $h^{-1}(x) = x/3$.

E20. Averigua la inversa de $f(x) = 3x + 5$, la de $g(x) = x^2$ y la de $h(x) = (x - 4)^3$.

Para hallar la función inversa se «despeja la y». Así, por ejemplo, para calcular la inversa de $f(x) = 2x + 1$, escribimos $y = 2x + 1$, despejamos la y y tenemos $x = (y - 1)/2$. Ahora cambiamos la y por una x y tenemos $f^{-1}(x) = (x - 1)/2$.

En el caso de la función exponencial tenemos que despejar la x de una expresión como $f(x) = 10^x = y$. Tomando logaritmos tenemos $\log(y) = x$, así que $x = \log(y)$: $f^{-1}(x) = \log(x)$. El logaritmo es la función inversa de la exponencial.

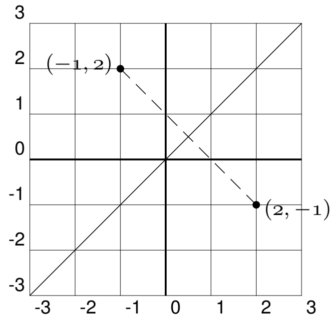
E21. ¿Qué ocurre cuando no es 10 la base de la exponencial? Por ejemplo, calcula la función inversa de $f(x) = 2^x$.

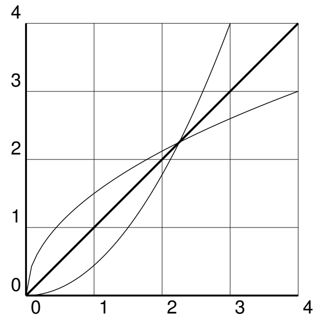
Q10. ¿Cuál es el rango de una función exponencial? ¿Es independiente de la base? Y, ¿cuál es el dominio de una función logarítmica? ¿Siempre es así? ¿Es casualidad?

Hay un método gráfico para obtener valores de la función inversa: simplemente buscamos en el eje y el valor deseado y miramos *cuál es el valor del eje x que corresponde*. Lógico, ¿no? En otras palabras: la función inversa *simplemente* intercambia la x y la y.

Fijaos: intercambiar los valores de x e y en un punto es «como» reflejarlo respecto a la diagonal $y = x$ (mira el dibujo).

Por tanto, la gráfica de la inversa de una función se obtiene reflejando la





gráfica de la función respecto del eje $y = x$.

E22. Dibuja la gráfica de $\log_2(x)$ a partir de la de 2^x que aparece en esta sección.

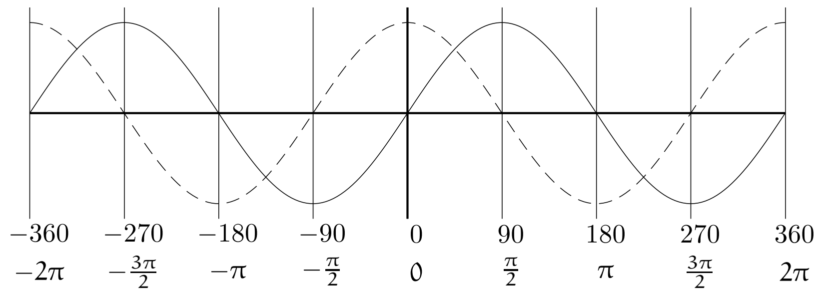
Q11. ¿En qué puntos se cruzan la gráfica de $f(x)$ y la de $f^{-1}(x)$?

Hay funciones que, al calcular su inversa de manera gráfica, nos dan como resultado una curva que *no es* una función. Por ejemplo: $f(x) = x^2$. Son aquellas funciones que, para un mismo valor de y tienen varios valores posibles de x. Cuando para cada valor de y hay, como máximo, un sólo valor posible de x, la función se dice **inyectiva**.

Q12. ¿Qué relación hay entre el dominio y recorrido de una función $f(x)$ y el de su inversa $f^{-1}(x)$?

Funciones Trigonométricas.

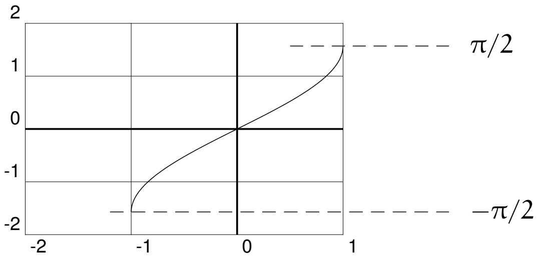
Las gráficas de las funciones seno y coseno son las siguientes:



Como habrá adivinado la astuta lectora y el astuto lector, la primera fila de valores está en grados y la segunda en radianes. Tanto el seno como el coseno oscilan entre el valor -1 y el valor 1. La función **tangente** se define como el cociente entre seno y coseno.

E23. Dibuja la gráfica de la función tangente. Obtén su dominio, su rango, sus discontinuidades y sus asíntotas.

La función que «deshace» la acción del seno (su función inversa) se llama **arco seno** ($\mathrm{asen}(x)$). Pero la función seno *no es inyectiva*, es decir: para cada valor de la y hay muchos valores posibles de la x. ¿Qué se hace entonces? Restringir los valores de x para que eso no suceda. Lo normal es quedarse con el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ (en radianes). Vemos el dibujo:



E24. Dibuja tú las funciones arco coseno y arco tangente, indicando con qué valores te quedas para los ángulos para hacer a la función inyectiva.

Tanto el seno como el coseno presentan **simetría bajo reflexión** en el eje y. En la gráfica vemos que el coseno es **par** y el seno es **impar**. En términos analíticos, se cumple $\cos(-x) = \cos(x)$ (y es par) y $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$ (y es impar). En general, una función par cumple $f(-x) = f(x)$, y una función impar cumple $f(-x) = -f(x)$.

Q13. La función tangente, ¿es par o impar?

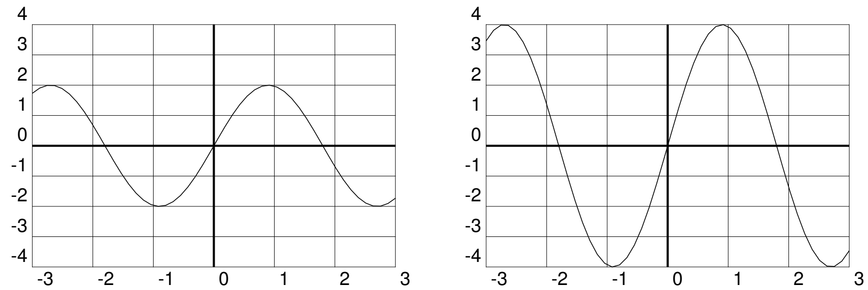
Q14. ¿Cómo es el producto de dos funciones pares, de dos funciones impares y de una función par y otra impar?

Las funciones trigonométricas son **periódicas**. Eso significa que hay un valor T para el que $f(x+T) = f(x)$ para cualquier valor de x. Para seno y coseno, si medimos los ángulos en radianes, es 2π; si es en grados, 360.

E25. Una noria de radio $R = 10$ metros da una vuelta por cada minuto. Calcula la función que nos da la altura de una de las barquillas en función del tiempo, sabiendo que para $t = 0$ estaba en su punto más alto.

Transformaciones de Escala en los Ejes.

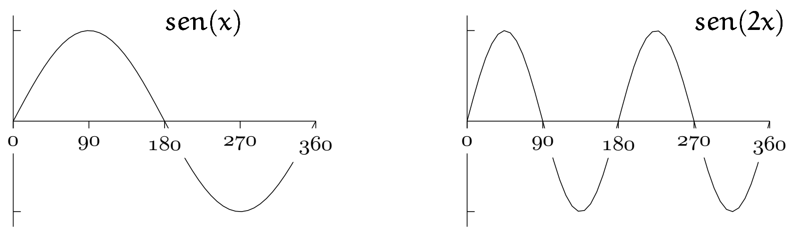
Al multiplicar $f(x)$ por un valor escalamos el eje y. Así, p.ej., $2f(x)$ es dos veces más alta... y dos veces más baja, como se ve en el ejemplo.



Muchos fenómenos periódicos (luminosidad a lo largo del día, movimiento de un péndulo, ciclos económicos o ecológicos...) se pueden representar por funciones sinusoidales. Pero si trabajamos en grados, el período será siempre de 360 [4]. ¿Cómo hacer que sea otro periodo cualquiera?

La solución es escalar el eje x. Si, *dentro de la función*, multiplicamos la x por 2, entonces el valor que antes tomaba $x = 10$ ahora le alcanzará en $x = 5$. Por tanto, la función se *comprimirá* en el eje x en un factor 2.

Acordándonos de lo que pasaba en la traslación en el eje x (si sumamos 5, trasladamos 5 hacia la izquierda) nos damos cuenta de que, lo que le hagamos a la x le afecta a la función de manera «inversa».



E26. Dibuja la función $f(x) = \sin(x)$ y después dibuja $2 \cdot f(x-2)$, $f(2x) - 1$ y $3 \cdot f(x/3)$.

E27. Dibuja una función sinusoidal que tenga periodo 30 y oscile entre -4 y 4. Ahora modifícala para que oscile entre 0 y 8.

[4] Y, si lo hacemos en radianes, de 2π.

Composición de Funciones

Si tenemos $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 2$, entonces $f(g(x))$ es el resultado de calcular *primero* $x + 2$ y, después, duplicar el resultado: $f(g(x)) = 2(x + 2) = 2x + 4$. En cambio, $g(f(x)) = 2x + 2$. Se dice que la *composición de funciones no conmuta*.

Q15. ¿Qué ocurre si componemos una función con su inversa? Por ejemplo, $f(x) = 2x$, $f^{-1}(x) = x/2$. Entonces, $f(f^{-1}(x)) = 2(x/2) = x$. ¿Es casualidad? ¿Ocurre siempre? Comprueba con otras funciones.

Q16. Hay una función $f(x)$ que cumple que $f(f(x)) = x^4$. ¿Cuál es? Averigua otra $g(x)$ tal que $g(g(x)) = x^2$.

Algunos Ejercicios Extra

E28. ¿Cuál es, a tu juicio, la función más sencilla que pasa por $(1, 3)$, $(2, 2)$ y $(3, 3)$? ¿Podría ser una recta?

E29. Calcula cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular a $y = 2x + 1$ por el punto $(1, 3)$. [Pista: calcula el ángulo que forma con la horizontal y súmale 90.]

E30. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = (x/2)^2 - 1$ b) $f_2(x) = 2|\operatorname{sen}(x)|$ c) $f_3(x) = 2^{x-1}$

d) $f_4(x) = \log(x-3)$ e) $f_5(x) = \cos(3x)+1$ f) $f_6(x) = x+\operatorname{sen}(x)$

E31. Averigua dos funciones que cumplan que $f(g(x)) = x^2 - 2x + 1$ y que $g(f(x)) = x^2 - 1$.

Q17. Halla las asíntotas de la función $f(x) = 2^x$ y de $f^{-1}(x) = \log_2(x)$.