Repaso de Geometría Plana.

CONTENIDOS:

– Vectores en el plano (componentes, módulo, dirección, paralelismo, suma, vector unitario, desigualdad triangular, bases, producto escalar, ortogonalidad, proyección ortogonal).

– Rectas y circunferencias en el plano (ecuaciones de la recta, ecuación de la circunferencia, distancia de un punto a una recta).

Vectores en el plano.

Supongamos que quisieras explicar a alguien dónde está un determinado objeto dentro de tu habitación. Lo normal es que le des puntos de referencia etiquetados mediante un nombre (a la derecha del armario, entre todos los calcetines sucios, etc.). Pero ahora supón que es un robot a quien tienes que explicar dónde has guardado las zapatillas para que te las traiga al sofá. El robot nada sabe de calcetines ni armarios, así que le tendrás que dar unas coordenadas:

– ¡C3PO! ¡Traeme el objeto que está en las coordenadas $(2,3)$ en mi habitación!

Cuál no será tu sorpresa cuando el obediente robot te traiga el osito de peluche de tu hermana. ¿Explicación? El sistema de coordenadas del pobre robot no coincide con el tuyo. Pero... ¿qué es un sistema de coordenadas?

Alguien tuvo la gloriosa idea, allá por el siglo XVII, de asociar números en lugar de nombres con los sitios. El tal René Descartes, pensando seguramente en la mejor forma de dar órdenes a los robots, pensó en especificar cada punto mediante su distancia a dos paredes que fueran perpendiculares entre sí. Como, por ejemplo, en la figura siguiente:

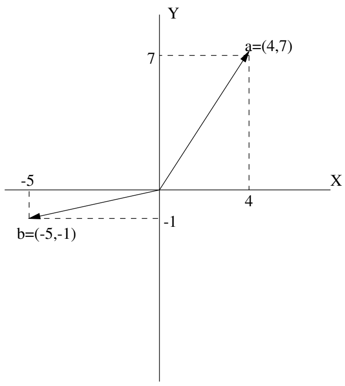


FIGURA 1.

Por tanto, un punto queda especificado por un par ordenado de números, como $\mathsf{P} = (3,4)$ ó $\mathsf{Q} = (-5,-1)$. ¡Ojo! Ese par de números representa un punto desde un sistema de referencia dado. Un sistema de referencia está formado por dos rectas (perpendiculares normalmente) que se cortan en un punto, llamado el origen de coordenadas. Si no nos ponemos de acuerdo en el sistema de referencia, no nos sirve de nada todo lo demás. Seguramente eso es lo que le pasó al pobre robot.

Ejemplo. Considera dos sistemas de coordenadas distintos, como en la figura, mi sistema (el de trazo continuo) y el del robot (trazo discontinuo).

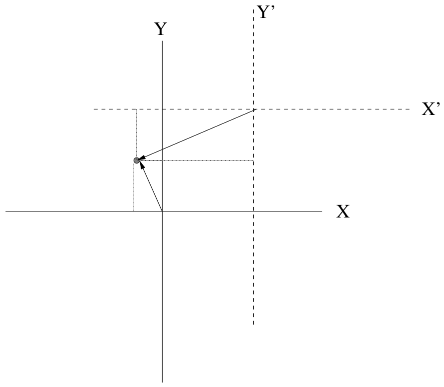


Figura 2.

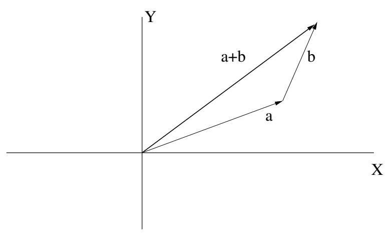
Supongamos que me informan de que el sistema de referencia de mi robot tiene su origen en el punto que yo llamo $(3, 4)$. Si quiero que me traiga las zapatillas, que desde mi S.R. están en el punto $(-1, 2)$, ¿dónde le tengo que decir que vaya?

Pues este problema (eminentemente práctico para todo aquél que tenga robots en su servicio doméstico) puedo resolverlo diciendole que vaya primero a MI origen de coordenadas, que será su punto $(-3, -4)$, y luego se desplace al $(-1, 2)$ desde allí.

Pero parece un poco tonto que dé tanta vuelta. ¿No podría ir directamente? Claro que sí: tiene que andar 3 hacia la izquierda y 4 hacia abajo para llegar a mi origen de coordenadas, y luego tiene que andar 1 hacia la izquierda y 2 hacia arriba para llegar a las zapatillas. En total, debe recorrer $3 + 1 = 4$ hacia la izquierda y $4 - 2 = 2$ hacia abajo, ¿no? Dicho en otras palabras, tiene que ir al punto $(-4, -2)$.

Por eso se inventó la suma de vectores: $(-3, -4) + (-1, 2) = (-4, -2)$. Si entendemos los vectores como "órdenes de movimiento" (muévete X a la derecha e Y hacia arriba), entonces la suma de vectores tiene un sentido muy fácil: muévete según el primero de los dos vectores y después según el otro.

Geométricamente, la suma de vectores es muy fácil de interpretar:



Sólo debes poner un vector sobre el final del otro y dibujar el que resulta de unir el inicio del primero con el final del último. Es lo mismo que considerar el realizar las dos órdenes de movimiento consecutivamente.

Lógicamente, el multiplicar a las dos componentes de un vector por un mismo número lo acorta o lo alarga en la proporción apropiada, sin más. Multiplicarlo por un número negativo, le cambia además el sentido (si iba hacia el NE, pues al SO).

Unas cuantas definiciones concernientes a los vectores:

– Un *sistema de referencia* o *sistema de coordenadas* del plano consiste en un punto de éste junto con dos ejes, etiquetados X e Y, normalmente perpendiculares entre sí.

– Un *vector* en el plano es un par ordenado de números, llamados *componentes*. Puede simbolizar:

* Un punto. En este caso la primera componente es la distancia al eje Y y el segundo la distancia al eje X.

* Una orden de movimiento. En este caso la primera componente indica la distancia a moverse hacia la derecha (en el eje X y la segunda la distancia a moverse hacia la izquierda (en el eje Y).

– *Módulo* de un vector: es su longitud. Por el teorema de Pitágoras, si el vector es $v = (x, y)$, su módulo es simplemente

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

– Un vector *unitario* es aquel que tiene módulo uno. Todo vector se puede convertir en unitario dividiéndole por su módulo.

– *Dirección* indica "la recta en la que está el vector", sin importar su módulo. Dos vectores con la misma dirección pueden tener distinto sentido si, estando en la misma línea, apuntan hacia lados opuestos.

Un ejemplo de aplicación: ¿Es la línea que va del origen al punto $A = (3, 4)$ paralela a la que va del punto $B = (-1, 1)$ al punto $C = (5, 9)$? Aunque dibujes los puntos seguramente no te quede claro.

La orden de movimiento del origen al punto A la llamaremos el vector OA, que es el $(3, 4)$. La orden de movimiento del punto B al punto C es la que resulta de responder a la pregunta: ¿cómo me tengo que mover desde B para llegar a C? En el eje X parto de -1 y tengo que llegar a 5, así que tengo que avanzar 6. En el eje Y parto de 1 y tengo que llegar a 9, así que tengo que avanzar 8. Por tanto, el vector es el $(6, 8)$.

En general, el vector $BC = C - B = (5, 9) - (-1, 1) = (5 - (-1), 9 - 1) = (6, 8)$. Ahora sé que los vectores correspondientes son $OA = (3, 4)$ y $BC = (6, 8)$... ¡Pero el segundo es simplemente el doble del primero! Por tanto, llevan la misma dirección y el mismo sentido; así que ambas líneas *son paralelas*.

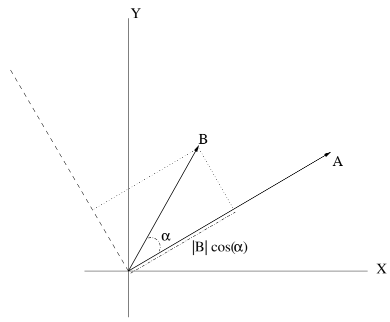
Por tanto, para hallar el vector que te lleva de un punto a otro sólo hay que restar las componentes del final menos las del inicial. La distancia entre dos puntos viene dada por el módulo del vector diferencia. Así, la distancia entre (A_x, A_y) y (B_x, B_y) es $d = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$.

Desigualdad triangular. Es una obviedad que para ir de un punto a otro el camino más corto es siempre la línea recta. Por tanto, ir de A a C pasando por B tiene que ser más largo que ir directamente. Dicho de otra manera:

$$|AC| \leq |AB| + |AC|$$

Mirando de nuevo la figura que representaba la suma de vectores, queda claro que: $|(a + b)| \leq |a| + |b|$.

Una noción clave para toda la geometría es la de *ángulo*. Supón que tienes dos vectores A y B y quieres saber qué ángulo forman entre ellos. ¿Qué podemos hacer?



Supongamos (ver la figura) que nos pasamos a un sistema de referencia en el que el nuevo eje X coincida con la dirección del vector A, y el nuevo eje Y sea perpendicular a él. En este nuevo sistema de referencia las componentes del vector A serán $(|A|, 0)$, ¿no? (todo en el nuevo eje X, nada en el nuevo eje Y). Geométricamente se ve cuáles son las nuevas componentes del vector B: $(|B| \cos(\alpha), |B| \operatorname{sen}(\alpha))$.

Ahora presentamos un nuevo personaje de nuestra comedia: el *producto escalar* de dos vectores. Consiste en multiplicar entre sí las primeras componentes de los vectores, las segundas componentes y luego sumar el resultado. Por ejemplo, si $A = (3, 4)$ y $B = (2, -1)$, entonces $A \cdot B = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = 2$.

Veamos cuál es el producto escalar de los vectores de la figura:

$$A \cdot B = (|A|, 0) \cdot (|B| \cos(\alpha), |B| \operatorname{sen}(\alpha)) = |A||B| \cos(\alpha)$$

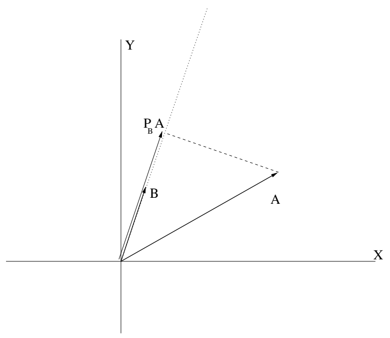
Por tanto, el producto escalar de dos vectores es igual al módulo del primero por el módulo del segundo por el coseno del ángulo que forman.

Así visto, ¿cuál es el ángulo que forman los vectores $(4, 3)$ y $(3, 4)$? Primero calculamos el producto escalar, que es $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$. Ahora calculamos el módulo de cada uno de estos vectores: $|(4, 3)| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (el otro es igual), y dividimos el producto escalar por el producto de los módulos: $24/25$. Eso es el coseno del ángulo que forman. Sólo tenemos que dar a la tecla `arc cos` de la calculadora para averiguar cuál es el ángulo.

¿Qué tiene que ocurrir para que dos vectores sean perpendiculares? Pues que el ángulo sea de $\pi/2$, es decir, que el coseno sea 0. Eso implica que el producto escalar tiene que ser cero. Por tanto, ¿cómo obtener las componentes de un vector perpendicular a uno dado? Por ejemplo, al $(3, 4)$. Pues la "regla del dedo gordo" es intercambiar las componentes y cambiar a una el signo, porque entonces queda: $(4, -3)$ y al multiplicar ambos escalarmente tenemos $3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$. ¿Se ve? Una pregunta: ¿a cuál de las dos componentes hay que cambiarle el signo? ¿por qué?

Por cierto, que a dos vectores que son perpendiculares los matemáticos, que así son de pedantes, les llaman *ortogonales* (del griego: ángulo recto). Introducimos, aprovechando, la *proyección ortogonal* de un vector sobre otro.

El concepto es el siguiente: pon los dos vectores sobre el origen de coordenadas y dibuja la recta que pasa sobre el segundo. Ahora "proyecta" el primero sobre esta recta. ¿Cuál es el vector resultante?



Por ejemplo, ¿cuál es la proyección del vector $A = (2, 3)$ sobre (la recta que pasa por) el $B(1, 1)$? El vector resultante tiene que ser proporcional al B, claramente. Además tiene que tener como módulo (ver el dibujo) $|A| \cos(\alpha)$, es decir:

$$P_B A = (|A| \cos(\alpha)) \cdot u_B$$

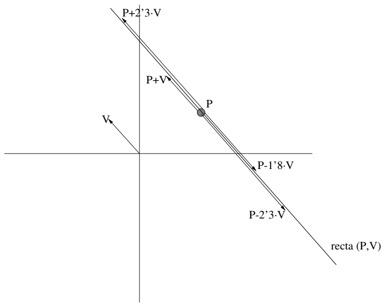
donde u_B es el vector unitario que tiene la dirección de B. Pero este vector unitario es igual a $B/|B|$, así que tenemos:

$$P_B A = (|A| \cos(\alpha)) \frac{B}{|B|} = \frac{A \cdot B}{|B|^2} B$$

En el ejemplo que teníamos, calculamos primero el módulo de B, que es $\sqrt{2}$. El producto escalar de los dos vectores es 5, así que el vector proyección de uno sobre el otro es $\frac{5}{2}(1, 1) = (2'5, 2'5)$. Se ve directamente que es paralelo al $(1, 1)$.

Ecuaciones de rectas y circunferencias en el plano.

Una recta en el plano se puede definir como el conjunto de puntos que se pueden acceder desde uno dado mediante aplicación de un solo vector (llamado el *vector director*) multiplicado por números distintos, como se ve en la figura:



De esta manera se puede escribir la ecuación de una recta como:

$$R = \{x \mid x = P + \lambda \cdot V\}$$

Vamos a explicar esta expresión. Está diciendo que la recta R es igual a todos los x (todos los puntos del plano) que cumplen la condición de ser de la forma $P + \lambda \cdot V$, es decir, que son igual a la suma del punto P más un número cualquiera (que se suele llamar λ) veces el vector V.

Un ejemplo. Dada la recta R, que está especificada por el punto $(1, 1)$ y el vector $(2, -1)$, podemos dar a λ el valor 4 y ver qué pasa:

$$P + 4 \cdot V = (1, 1) + 4 \cdot (2, -1) = (1, 1) + (8, -4) = (9, -3)$$

Por tanto, podemos afirmar que el punto $(9, -3)$ pertenece a la recta. ¿Se ve?

La que hemos dado es la expresión *vectorial* de la ecuación de la recta. Cuando especificamos sus componentes se convierte en la ecuación *paramétrica*:

$$R = \{(x, y) | x = P_x + \lambda \cdot V_x,\ y = P_y + \lambda \cdot V_y\}$$

Así, podemos dar la ecuación de la recta anterior así:

$$x = 1 + 2\lambda$$
$$y = 1 - \lambda$$

Pero podemos de las dos ecuaciones depejar λ e igualar, obteniendo:

$$\lambda = \frac{x - P_x}{V_x} = \frac{y - P_y}{V_y}$$

de esta manera nos queda la ecuación llamada *continua*. Por ejemplo, imaginad que nos dan como ecuación de una recta la siguiente:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2}$$

Ya sabemos que la recta pasa por el punto $(2, -4)$ y que tiene por vector director al $(3, 2)$, de un solo vistazo. A partir de esta ecuación se pueden eliminar los denominadores:

$$V_y(x - P_x) = V_x(y - P_y) \longrightarrow V_y x - V_x y = V_y P_x - V_x P_y$$

Es la ecuación llamada *general* o *implícita* de la recta. ¿Qué aprendemos de ella? Pues imaginad que tenemos la ecuación de una recta de la forma:

$$3x - 2y = -4$$

Ya podemos saber directamente que el vector director es el $(2, -3)$. Por último, la ecuación *explícita* es la que resulta de despejar la y en función de la x. En este caso, el coeficiente de la x es la pendiente de la recta, y el término independiente es la altura a la que corta al eje Y.

Una **circunferencia** se define como el conjunto de puntos que están a la misma distancia (llamada radio, R) de uno dado (llamado centro, (x_c, y_c)). Sea un punto cualquiera de la circunferencia el (x, y). La distancia entre los dos puntos viene dada por:

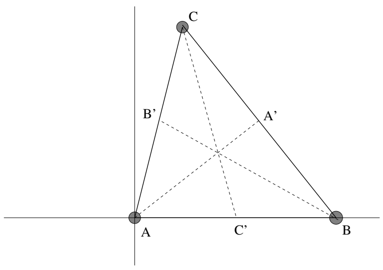
$$\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = R$$

Esto es ya la ecuación de una circunferencia, pero queda mejor si elevamos los dos miembros al cuadrado: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$.

La geometría "con números" (que también se llama geometría *analítica*) permite resolver fácilmente (ejem) problemas que eran muy complicados con la geometría antigua (también llamada *sintética*, que es la que usáis en dibujo técnico).

P.ej.: Dado el triángulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ y $C = (2, 2)$, calcula las coordenadas de su circuncentro. Comprueba, además, que éste corta a las medianas a dos tercios de la base.

Recordamos que la mediana es la línea que va de un vértice a la mitad del lado opuesto. Primero nos hacemos un gráfico del triángulo en cuestión:



Ante todo calculamos las coordenadas de los puntos A', B' y C'. El A' está a mitad de camino entre el B y el C, y por tanto sus coordenadas son $A' = (3, 1)$. Del mismo modo, $B' = (1, 1)$ y $C' = (2, 0)$.

Ahora calculamos las ecuaciones de las tres medianas::

$$AA' \to V_{AA'} = (3, 1) \to x - 3y = 0$$
$$BB' \to V_{BB'} = (-3, 1) \to x + 3y = 4$$
$$CC' \to V_{CC'} = (0, -2) \to -2x = -4 \to x = 2$$

Queremos comprobar que hay un punto de intersección entre las tres rectas y calcularlo. De la última ecuación tenemos que $x = 2$, así que sustituyendo en las demás tenemos:

$$2 - 3y = 0 \to y = 2/3 \qquad 2 + 3y = 4 \to y = 2/3$$

Luego las tres ecuaciones son compatibles y, por tanto, las tres rectas tienen un punto en común, que es el *circuncentro*. Sus coordenadas son $P = (2, 2/3)$.

Comprobamos la ley de los $2/3$ con los puntos C y C'. La distancia $d(P, C) = 4/3$, y la distancia $d(C, C') = 2$, así que $d(P, C)/d(C, C') = 2/3$, como queríamos demostrar.

Si te ha sabido a poco, prueba a hacer la demostración para un triángulo general.