

Geometría. Del plano al espacio.

Apuntes de Geometría de 2 Bachillerato. Curso 1999-2000.

Rotación y traslación de ejes.

Consideremos dos posibles cambios de sistema de referencia. En el primero los ejes no cambian de orientación pero tienen distinto origen. En el segundo el origen no cambia, pero sí la orientación de los ejes. El primer caso es una *traslación*, y el segundo una *rotación*.

Pongámonos en el primer caso. Sea $P = (x, y)$ un punto visto desde el sistema de referencia inicial XY . Ponemos un nuevo sistema de referencia centrado en el punto (x_0, y_0) , con los ejes orientados de la misma forma. ¿Cuáles serán las coordenadas del mismo punto visto desde este otro sistema de referencia (x', y') ? Del dibujo se ve:

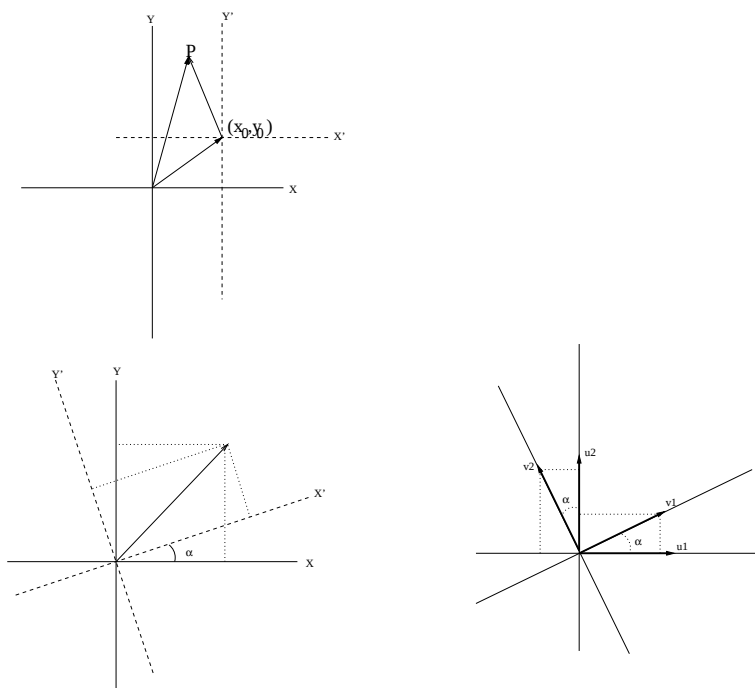
$$\begin{aligned}x' &= x - x_0 \\y' &= y - y_0\end{aligned}$$

En otras palabras, $\vec{X}' = \vec{X} - \vec{C}$, donde $\vec{C}$ es el vector que lleva del origen del primer SR al origen del segundo.

El segundo caso, la rotación, es algo más complejo. Conviene introducir algunos conceptos técnicos para hacerlo con más sencillez. Cuando tenemos un sistema de referencia, éste nos proporciona una **base canónica de vectores**, es decir: unos vectores de módulo unidad que son clave porque apuntan en la dirección de los ejes. Estos vectores son (siempre en su propia base) el $(1, 0)$ y el $(0, 1)$. Llamémosles $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ para la base original.

La gracia es que todo vector del plano se puede expresar partiendo de ellos. Así, por ejemplo, el vector $\vec{V} = (5, -3)$ se puede escribir como $\vec{V} = 5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, simplemente multiplicando cada vector por un número y luego sumando. Se dice que todo vector del plano es *combinación lineal de los vectores de la base*.

Si cambiamos de base, las componentes son distintas, pero la identidad sigue siendo cierta. Pongámonos en la base rotada. Llamemos a los vectores de la base sobre ella los $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Entonces tendremos que $\vec{V} = C\vec{v}_1 + D\vec{v}_2$, donde C y D son dos números que desconocemos, aunque sospechamos que algo tienen que ver con el ángulo α de rotación.



¿Cuáles son las componentes de los vectores de la nueva base, referidos a la antigua? Del dibujo se ve que:

$$\vec{v}_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \vec{v}_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

O, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \cos \alpha \vec{u}_1 + \sin \alpha \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 &= -\sin \alpha \vec{u}_1 + \cos \alpha \vec{u}_2\end{aligned}$$

Ahora supongamos que queremos referir el punto P , con coordenadas (x, y) en la primera base a la segunda. Tendrá que ocurrir la siguiente identidad vectorial:

$$P = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'\vec{v}_1 + y'\vec{v}_2$$

¿Cuánto valen x' e y' para que eso sea cierto? Hacemos el cálculo sustituyendo el valor de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = x'(\cos \alpha \vec{u}_1 + \sin \alpha \vec{u}_2) + y'(-\sin \alpha \vec{u}_1 + \cos \alpha \vec{u}_2)$$

Desarrollando,

$$x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)\vec{u}_1 + (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)\vec{u}_2$$

Pero para que esta ecuación sea cierta, lo que multiplica a $\vec{u}_1$ a la izquierda debe ser igual a lo que multiplica $\vec{u}_1$ a la derecha, e igual con $\vec{u}_2$, así que tenemos:

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha\end{aligned}$$

Expresado en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Si queremos obtener las coordenadas x' e y' en términos de los originales x e y sólo tenemos que invertir la matriz. El determinante de ésta es $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, así que tenemos como inversa:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

que es la matriz que, actuando sobre el vector (x, y) te da el vector (x', y') .

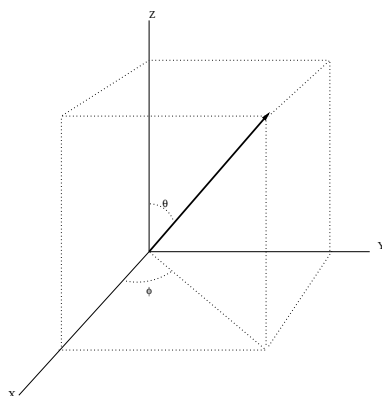
Ejemplo: En mi sistema de referencia, el punto P está en las coordenadas $(5, 3)$. En un sistema de referencia que esté rotado 45° en el sentido de las agujas del reloj respecto al mío, ¿cuáles son las coordenadas del punto P ?

Nota que la matriz de cambio de base a un sistema rotado corresponde con una rotación inversa (de ángulo $-\alpha$) de los vectores. ¿Sabrías explicar por qué?

Las rotaciones se ven mucho más fácilmente cuando se expresan los vectores en la llamada *forma polar*. Esta consiste en dar, en lugar de las dos componentes, el módulo y el ángulo que forman con el eje X , (contando en el sentido de las agujas del reloj). ¿Sabrías convertir el vector $(3, 4)$ a polares?

El espacio.

Si están bien comprendidos los conceptos de geometría plana, el salto al espacio no debería resultar traumático... Para empezar, la especificación de un punto en el espacio no precisa de dos, sino de tres números o componentes, como se ve en el dibujo.



Por tanto, un vector posible es el $(1, 2, 3)$, o el $(-4, 1, 8)$. ¿Cuál es ahora la longitud de un vector? La generalización del teorema de Pitágoras es directa:

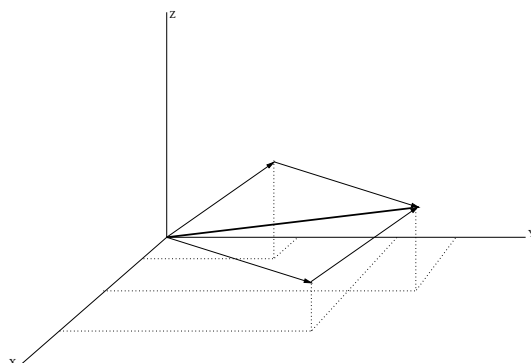
$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(¿Se te ocurre alguna demostración?). Nótese que si queremos especificar un vector en forma polar no tenemos que dar ya una longitud y un ángulo, sino (por ejemplo) una longitud y *dos* ángulos. Aparece una propuesta en la figura (que se conoce como coordenadas esféricas), con los ángulos θ y ϕ . ¿Podrías dar los valores de r (módulo) y los dos ángulos para el vector $(1, 2, 1)$?

En el caso del plano estudiábamos la posibilidad de que dos vectores fueran paralelos observando una posible proporcionalidad entre sus componentes. Por ejemplo, $(2, 3)$ es paralelo al $(4, 6)$. En 3D ocurre lo mismo, claro: el $(2, 3, 1)$ es paralelo al $(4, 6, 2)$. También conserva su sentido la suma de vectores, aunque el paralelogramo haya que dibujarlo en el espacio.

Rectas y Planos.

Pero fijos en el dato interesante: cuando un vector es suma de otros dos, los tres estarán contenidos siempre en el mismo plano.



Estamos aquí ante una estructura más general de lo que aparenta. Suponed que tenemos un punto del espacio y que sólo disponemos de un vector, considerado como orden de movimiento. Las reglas del juego van a ser las que siguen: nos pertenece cualquier punto que se pueda acceder desde el nuestro siempre y cuando podamos llegar a él usando nuestro vector para trasladarnos, multiplicado por un número cualquiera. ¿Qué puntos del espacio son los que nos pertenecen?

Pues una recta, como ya sabemos de la ecuación paramétrica para la recta en dos dimensiones. Así, una recta en el espacio se determina también así:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{V}$$

Por ejemplo, la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y tiene como vector director el $(2, 1, 4)$ será:

$$\begin{aligned}x &= 1 + \lambda \cdot 2 \\y &= 2 + \lambda \cdot 1 \\z &= 3 + \lambda \cdot 4\end{aligned}$$

Eliminando el parámetro λ de las tres componentes obtenemos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$$

En general,

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}$$

Ahora supongamos que tenemos el mismo juego que antes, otra vez con un vector inicial pero ahora con dos vectores para movernos, que no sean paralelos. Ahora nuestros movimientos no quedan restringidos a una recta, sino que podemos llegar a... todo un plano. Es decir: podemos movernos según cualquier “combinación lineal” de los vectores originales.

De esta manera, podemos definir un plano mediante esta regla: dados un punto inicial y dos vectores, pertenecen al plano todos los puntos de la forma:

$$\vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Eso es precisamente una combinación lineal: $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. Explicitado:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \lambda u_x + \mu v_x \\y &= y_0 + \lambda u_y + \mu v_y \\z &= z_0 + \lambda u_z + \mu v_z\end{aligned}$$

También se puede ver de esta manera: dos vectores determinan una pila de planos paralelos, y el punto inicial te determina cuál de esos planos quieres. ¿Se ve? Un ejemplo: el plano que pasa por el punto $(2, 1, 3)$ y está “basado” en los vectores $(2, 4, 2)$ y $(0, 0, 1)$ estará dado por la ecuación:

$$\begin{aligned}x &= 2 + \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 0 = 2\lambda \\y &= 1 + \lambda \cdot 4 + \mu \cdot 0 = 4\lambda \\z &= 3 + \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 1 = 2\lambda + \mu\end{aligned}$$

Ahora supongamos que nos hicieran la siguiente pregunta: tengo tres vectores, como el $(1, 1, 2)$, el $(2, 1, 1)$ y el $(6, 6, 6)$. ¿Están los tres vectores en el mismo plano? De otra manera: ¿son los tres vectores coplanarios?

Podemos reconvertir la pregunta de esta manera: ¿se puede expresar alguno de los tres vectores como combinación lineal de los otros dos? Pero recordamos, de las propiedades de los determinantes, que cuando una columna de un determinante era combinación lineal de otras dos, entonces el determinante valía cero. Así, podemos calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Obviamente, es cero: la suma de la primera columna multiplicada por dos y la segunda columna multiplicada por dos nos da la tercera columna.

Podemos ver de otra manera el problema de la coplanariedad. Si tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanarios, entonces el sistema de ecuaciones siguiente tiene solución:

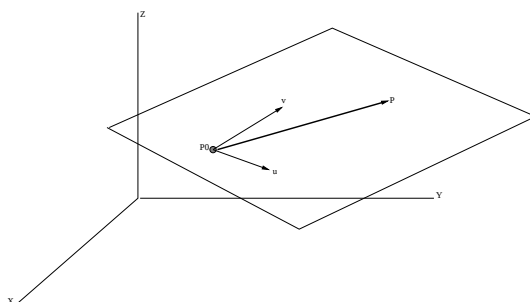
$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

Es decir, existen dos números tales que el primero por $\vec{b}$ más el segundo por $\vec{c}$ nos dan $\vec{a}$. Obviamente, podría haber cogido cualquiera de los tres vectores como el privilegiado. Particularizando para el ejemplo anterior, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 6y \\ 1 &= x + 6y \\ 2 &= x + 6y \end{aligned}$$

Tenemos tres ecuaciones por sólo dos incógnitas. Este sistema sólo puede ser compatible si la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras. Según el teorema de Rouché-Frobenius, el rango de la matriz ampliada y el de la matriz de coeficientes deben coincidir para que el sistema sea compatible. Pero la matriz de coeficientes sólo puede tener rango 2, (es matriz 2×3), así que el rango de la matriz ampliada tiene que ser 2 también y volvemos a la condición de determinante cero.

Por tanto, la ecuación de un plano se puede escribir diciendo que está formado por los puntos $\vec{P}$ tales que, al restarles el vector del punto inicial $\vec{P}_0$, nos queda un vector que es coplanario con los dos dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Ver el dibujo:



De tal manera que los vectores $\vec{P} - \vec{P}_0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen que ser coplanarios, y por tanto cumplir la siguiente condición algebraica:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_x & v_x \\ y - y_0 & u_y & v_y \\ z - z_0 & u_z & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Y tenemos la ecuación general del plano.

Por ejemplo: ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 1, 3)$ y que tiene como vectores el $(2, 4, 2)$ y el $(1, 1, 1)$.

$$0 = \begin{vmatrix} x - 2 & 2 & 1 \\ y - 1 & 4 & 1 \\ z - 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(x - 2) + 2(y - 1) + 2(z - 3) - 4(z - 3) - 2(x - 2) - 2(y - 1) = 2x - 2z + 2 = 0$$

Es decir, $x - z + 2 = 0$.

Tenemos en general que la ecuación de un plano tiene la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Los coeficientes A , B y C , como todo en geometría, tienen un significado intuitivo, pero lo dejamos para más adelante.

Por otro lado, en general dos planos se cortan en una recta, así que tenemos una última forma de especificar una recta en el espacio: dando las ecuaciones de dos planos cuya intersección la delimita. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

forman la ecuación de una recta en el espacio. ¿Sabrías pasarla a forma continua y paramétrica?

Posiciones relativas de rectas y planos.

Vamos a tomar como forma “oficial” de la ecuación de un plano la forma general ($Ax + By + Cz + D = 0$) y para la recta la intersección de dos planos. Ahora la pregunta es: dados dos planos, dos rectas o un plano y una recta, ¿se cortarán? ¿serán paralelos? ...

Un poco de álgebra de determinantes nos resuelve el problema. De hecho, vamos a aprovechar para dar un significado geométrico a los rangos de matrices.

Sean dos planos: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. ¿Habrá intersección entre ellos? Tomemosles como si fueran un sistema de ecuaciones. La matriz ampliada sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array} \right)$$

Según el teorema de Rouché-Frobenius, para que el sistema sea compatible el rango de la matriz ampliada tiene que ser igual al de la matriz de coeficientes. En cualquier caso, ese rango nunca podrá pasar de dos.

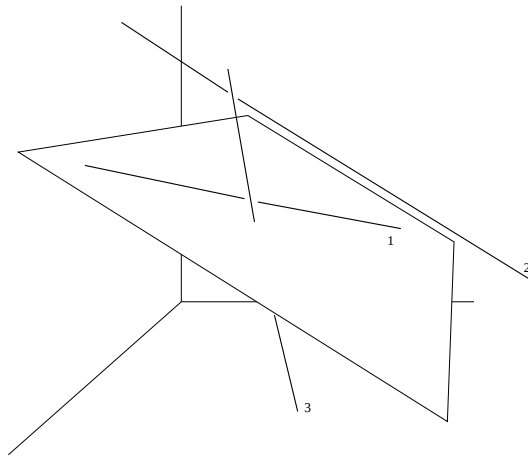
Supongamos que el rango de la matriz de coeficientes fuera 1 y el de la matriz ampliada fuera 2. En este caso el sistema sería incompatible y no habría soluciones. Eso implica geoméricamente que los dos planos han de ser paralelos. Por ejemplo:

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \quad 2x + 3y + z + 2 = 0$$

Notad que coeficientes iguales implica planos paralelos y rango 1 para la matriz de coeficientes. Pero el término independiente no es igual en ambos casos, así que el sistema es incompatible. Por tanto, si los rangos son:

- Iguales ambos a 1: ¡son el mismo plano!
- Iguales ambos a 2: sistema compatible, pero indeterminado. Se cortan en una recta.
- Rango de matriz de coeficientes 1 y matriz ampliada 2: sistema incompatible, planos paralelos.

El caso de recta y plano es muy parecido. Tomando la recta como la intersección de dos planos, tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Ahora se puede presentar una mayor tipología. Obviamente, el rango de la matriz de coeficientes nunca puede ser uno (porque entonces no habría recta). Tenemos:



– (caso 1) Rangos iguales ambos a 2: sistema compatible, pero indeterminado. ¿Cómo es posible? Porque la recta está *contenida* en el plano.

– (caso 2) Rangos diferentes (matriz de coeficientes 2, ampliada 3): sistema incompatible, así que recta y plano paralelos.

– (caso 3) Rangos iguales a 3. Sistema compatible determinado: se cortan en un punto. Son *incidentes*.

En realidad, hay infinitos pares de planos que tienen a una recta dada como intersección. Dada una recta r , ¿cómo hallar el conjunto de todos los planos que la contienen? Veámoslo con un ejemplo. Sea la

recta:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 2 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Entonces podemos escribir el “vector generador” de cada uno de los planos que dan origen a la recta: $(2, 3, 4, 2)$ y $(1, -1, 1, -1)$. Ahora formamos cualquier combinación lineal con ellos, como, por ejemplo, su suma: $(3, 2, 5, 1)$ y “reescribimos” el plano: $3x + 2y + 5z + 1 = 0$. Este plano también contiene a la recta ¿Se ve la idea? ¿Por qué funciona?

Podemos escribir el plano más general que contiene a la recta como:

$$2x + 3y - 4z + 2 + \lambda(x - y + z - 1) = 0$$

Sustituyendo λ por valores reales obtenemos planos que contienen a la recta deseada. Una expresión como ésta se dice que denota un *haz de planos*. Puedes imaginar un haz de planos como las baldas de una puerta giratoria: todas contienen al eje.

De la misma manera se puede estudiar la casuística para el corte de dos rectas, o de tres planos. En el caso de dos rectas tenemos cuatro ecuaciones (dos por cada recta) y sólo tres incógnitas. Ya que el mínimo rango posible es 2 (por la misma razón de antes), se pueden dar los siguientes casos:

- Rangos iguales a 2. Sistema compatible, pero indeterminado. ¡Las rectas coinciden!
- Rangos distintos: matriz de coeficientes 2 y ampliada 3. En este caso el sistema es incompatible, pero las filas no son todas independientes (el rango sería 4). Por tanto los haces de planos de ambas rectas tienen algún plano en común. Eso implica que ambas rectas son coplanarias, pero no se cortan: ergo, son paralelas.
- Rangos iguales ambos a 3: sistema compatible determinado, las dos rectas se cortan en un punto.
- Rangos distintos: matriz de coeficientes 3 y ampliada 4. En este caso el sistema vuelve a ser incompatible, pero ahora los haces de planos son independientes. Las rectas no son paralelas, sino que se “cruzan” en el espacio.

¿Serías capaz de establecer los criterios para la intersección de tres planos en el espacio?