Geometría Métrica en el espacio.

Apuntes de Geometría de 2 Bachillerato. Curso 1999-2000.

Midiendo longitudes y ángulos.

Hasta ahora hemos estudiado propiedades del espacio en las que no entraban distancias ni medidas de ángulos. Se suele llamar a la geometría sin medidas la *geometría afín*, mientras que cuando se añade la estructura de distancias y ángulos se llama *geometría métrica*.

Nos vamos a dedicar ahora a la geometría métrica euclídea, es decir: la que se da en un espacio que cumple los postulados de Euclides. Como ya hemos comentado, restringirse a Euclides no es toda la historia de la geometría, pero vayamos por partes.

Podemos extender a tres dimensiones la noción de *producto escalar*, definiendo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Como ya comentamos al saltar al espacio, la longitud de un vector se calculaba por el teorema de Pitágoras generalizado para 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Es decir: $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$. En otras palabras: la longitud de un vector se calcula multiplicándolo escalarmente por sí mismo (y luego tomando la raíz cuadrada, claro). Una conclusión simple es que el producto escalar de un vector por sí mismo siempre tiene que ser un número positivo: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, y sólo vale cero cuando el vector mismo es cero.

La interpretación geométrica del producto escalar es la misma que en 2D: es igual al producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\alpha)$$

Luego en el espacio también se cumple que dos vectores son perpendiculares si y sólo si (abreviado *sii*) el producto escalar entre ellos es cero.

Un ejemplo: Determina un vector perpendicular al $(2, 1, 3)$. Sea (x, y, z) el vector. Tiene que cumplir que $2x + y + 3z = 0$. ¿Qué ocurre con este vector? Pues no sólo no es único (lo que ya ocurría en 2D, donde los vectores perpendiculares a uno dado forman una recta), sino que además su ecuación es la ecuación de un plano... ¿no nos da eso una idea?

Quedamos en que dos planos eran paralelos si los coeficientes de la x, la y y la z en ambos eran proporcionales. Por tanto todos son paralelos a uno que tiene la forma $Ax + By + Cz = 0$. Pero eso es la condición de que (x, y, z) es perpendicular al vector (A, B, C), ¿no? Conclusión: en la ecuación de cualquier plano, la interpretación geométrica de los coeficientes A, B y C es la siguiente: son las componentes de un vector que es perpendicular al plano. A este vector le llamaremos el *vector normal* del plano.

Un ejemplo: ¿Cuál es el plano que es perpendicular al vector $(1, 2, 3)$ y pasa por el punto $(2, 1, 0)$.

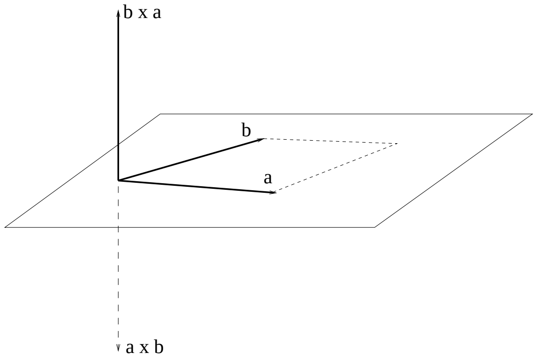
Este plano tendría que ser paralelo al $x + 2y + 3z = 0$, que es el conjunto de vectores que son perpendiculares al dado. Pero todo plano paralelo a él es de la forma $x + 2y + 3z + K = 0$, ¿no? Así que calculamos K para que pase por el punto $(2, 1, 0)$:

$$2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + K = 0 \longrightarrow K = -4$$

Y la ecuación del plano queda $x + 2y + 3z - 4 = 0$.

Midiendo áreas.

Existe otro "producto" entre vectores que resulta útil, y se llama el **producto vectorial**. Geométricamente, el producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otro vector (no como el producto escalar, que daba un número) cuya dirección es perpendicular al plano que determinan los dos vectores y cuyo módulo es igual al área del paralelogramo que delimitan. Un vistazo al dibujo debería ayudar.



¿Cómo se calcula? Vamos a dar un argumento "heurístico" (quiere decir: para saber cómo va la cosa) antes de la demostración. El área entre dos vectores paralelos es cero, así que cuando $\vec{a}$ tenga componentes proporcionales a las de $\vec{b}$ entonces debería darnos cero... ¿Qué estructura matemática nos da algo parecido? Justo, el determinante. Así tenemos como propuesta:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Donde $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son los tres vectores base canónica del espacio: $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{k}=(0,0,1)$. ¿Cómo se usa esa fórmula? Veamos un ejemplo: Calcula el producto vectorial de los vectores $(1,2,0)$ y $(0,1,2)$. Hacemos el determinante:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}=(4,-2,1)$$

Puedes comprobar directamente que este vector es perpendicular a los dos originales, con lo que debe ser perpendicular al plano que delimitan. Una demostración formal de esta propiedad sería así:

El producto escalar de un vector expresado en la forma $V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$ por otro vector cualquiera equivale a sustituir los $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ por las componentes de este vector, ¿no? Pues lo mismo ocurre con el producto vectorial: si quieres multiplicarle escalarmente con, pongamos, el vector $\vec{a}$, sólo tienes que sustituir los vectores de la base con las componentes de $\vec{a}$ en el determinante. Pero entonces tienes un determinante con dos filas iguales, y eso vale cero. Por tanto, son perpendiculares. Q.E.D. (*quod erat demonstrandum*).

Falta por probar que el módulo del producto vectorial corresponde con el área del paralelogramo que determinan los dos vectores. Esta prueba es un poco rollo, pero hay que hacerla (snif, snif).

Antes de nada desarrollamos el determinante anterior por completo para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ arbitrarios:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x)$$

Por tanto, el módulo del producto vectorial valdrá:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_zb_x-a_xb_z)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2=$$

$$=a_y^2b_z^2+a_z^2b_y^2+a_z^2b_x^2+a_x^2b_z^2+a_x^2b_y^2+a_y^2b_x^2-2a_ya_zb_yb_z-2a_za_xb_zb_x-2a_xa_yb_yb_x$$

Puff, vaya chorizo. Ahora vamos a hacer algo que parece no tener nada que ver. Desarrollamos la expresión:

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 =$$

Cuando desarrollamos la expresión por completo (hacedlo), comprobamos que coincide exactamente con la expresión anterior, así que deducimos:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

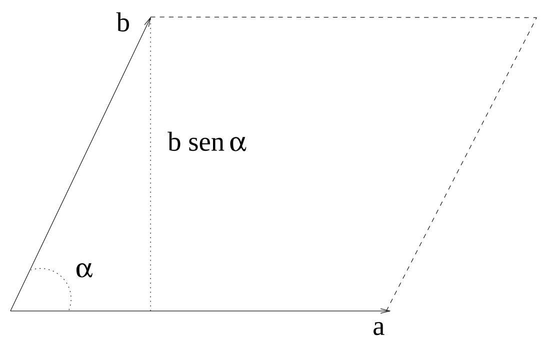
Pero ahora podemos usar el hecho de que $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$ y tenemos:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos(\alpha) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos(\alpha))$$

y nos queda la fórmula final:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

Otra vez Q.E.D... ¿¡cómo!? ¿Que no veis de dónde me saco que eso es el área del paralelogramo? Bueno, vale... Ved el dibujo:



Así que el área de cualquier paralelogramo de lados a y b y ángulo entre ellos α, tenemos que el área vale $ab\,\mathrm{sen}\,\alpha$, ¿captado?

De esta manera, aprendimos cómo medir el volumen de un triángulo del que nos dan las coordenadas de los tres puntos en el espacio. Por ejemplo, sean éstas $A = (1,1,1)$, $B = (1,1,0)$ y $C = (0,1,1)$. Los dos vectores que determinan el triángulo son $\vec{AB} = (0,0,-1)$ y $\vec{AC} = (-1,0,0)$. Ahora calculamos el producto vectorial:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = (0,1,0)$$

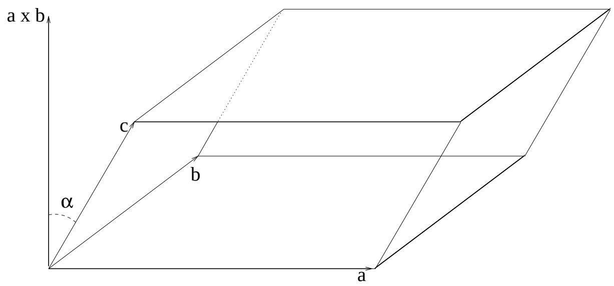
El módulo del producto vectorial es 1, así que el área del triángulo, que es la mitad del paralelogramo, valdrá 1/2.

¿Qué decir del sentido en el que apunta del producto vectorial? No vamos a entrar en más demostraciones, pero doy la regla. La que a mí más me convence es la siguiente: imagina que el primer vector es el eje X y el segundo el eje Y. Entonces el producto vectorial apunta adonde apuntaría el eje Z normalmente.

Pero, ¡mucho ojo! $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$. Normal: si intercambias dos filas del determinante cambia su signo, ¿no?

Midiendo volúmenes

¿Qué es un cuerpo que tiene seis caras, paralelas dos a dos? ¡Justo! ¡Un paralepípedo! Supongamos que tenemos el área de una de sus caras. El volumen es igual a este área multiplicada por la altura, siendo ésta la distancia a la cara superior, ¿no?



Ahora supongamos que tenemos un paralepípedo determinado por tres vectores. Multiplicando vectorialmente dos de ellos tenemos un vector perpendicular a esa cara cuyo módulo es igual a su área. La altura, según se ve en el dibujo, es igual al módulo del vector $\vec{c}$ multiplicado por el coseno del ángulo que forma con la "vertical", dada por el vector producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$. En conclusión, el volumen es:

$$V = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\alpha) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

A este producto, que es mezcla de escalar y vectorial, en un alarde de originalidad se le llama *producto mixto.*

Pero, como dijimos antes, multiplicar escalarmente un vector por el producto vectorial de otros dos equivale a meter las componentes de este nuevo vector en la primera fila del determinante, así:

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Como ya adelantamos hace tiempo, el determinante tiene el significado geométrico de dar el volumen del paralepípedo formado con los tres vectores fila (o columna, que para el caso es igual).

Una nota importante: tres vectores denotan también un tetraedro, ¿no? ¿Cómo hallar su volumen? Os dejo convenceros a vosotr@s mism@s de que este tetraedro cabe exactamente seis veces en el paralepípedo, así que su volumen se calcula hallando el determinante y dividiendo entre seis.

¿Qué ocurre si el determinante da cero? Pues que alguno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos, así que no determinan ningún volumen... ¿Y si da negativo? Bueno... en otro curso te lo explicarán. De momento, prescinde del signo.

Distancias entre puntos, rectas y planos.

Muchos problemas se reducen al tipo siguiente: calcula la distancia entre X e Y, siendo X e Y un punto, una recta o un plano. Hay que tener en cuenta que lo que nos piden es siempre la distancia más corta. Por ejemplo, entre un punto y un plano, la distancia más corta aparecerá cuando te acerques según una recta que sea *perpendicular* a este plano. Esta es la clave de todos estos problemas, así que os *ruego* que no utilicéis fórmulas enlatadas para estos problemas. Veamos unos ejemplos:

1.- Calcula la distancia del origen al plano que tiene por ecuación normal $Ax + By + Cz + D = 0$. Calcula también el punto de este plano que es el más cercano al origen.

(NOTA: con ecuación normal del plano sólo quieren decir que los números (A, B, C) forman un vector unitario.)

Este problema es más difícil... porque no tiene números. Sabemos que el vector normal al plano es el (A, B, C). Nos tendremos que acercar al plano siguiendo esta dirección. Por tanto, el vector del plano que "pille" más cerca del origen será de la forma $d \cdot (A, B, C)$ donde d será la distancia buscada. Por tanto, se cumplirá:

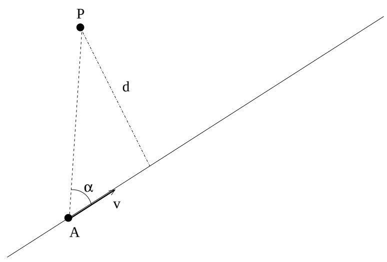
$$A(dA) + B(dB) + C(dC) + D = 0 \;\longrightarrow\; (A^2 + B^2 + C^2)d + D = 0$$

Pero como el plano estaba dado en ecuación normal, $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ y, por tanto, $d = -D$. Como d tiene que ser una distancia, podemos escribir: $d = |D|$, prescindiendo del signo.

Y el punto del plano que más cerca pilla será el $(-DA, -DB, -DC)$.

2.- Distancia entre un punto y una recta.

Aquí la idea sería tomar (como en el dibujo) un vector que vaya de nuestro punto a un punto cualquiera de la recta. La distancia entre el punto y ésta será igual al producto de la distancia AP multiplicada por el seno de α, ¿no? Si el vector director de la recta está normalizado, sólo tenemos que multiplicar vectorialmente $\vec{AP}$ por éste, y su módulo de este producto vectorial será la distancia deseada.



3.- Distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio.

Este es el caso más complejo que vamos a ver. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores directores (unitarios) de ambas rectas. Ahora tenemos que encontrar una recta que corte a ambas perpendicularmente. El vector director de esta nueva recta es sencillo de encontrar: es $\vec{u} \times \vec{v}$. Unitariza este vector y llámale $\vec{n}$. Ahora, toma un punto A en la primera recta y otro B en la segunda. Multiplica el vector $\vec{AB}$ escalarmente por este vector $\vec{n}$ y tendrás la distancia pedida. ¿Podrías hacer un dibujo aclarativo y explicar por qué?