Integral y Área

Función Área

Dibujamos una función cualquiera, como la de la figura 1. Ahora ponemos una barra vertical en cualquier posición, digamos que es $x = x_0$. Tomamos otra barra igual y la ponemos en x, y sombreamos el área entre las dos barras, el eje X y la función.

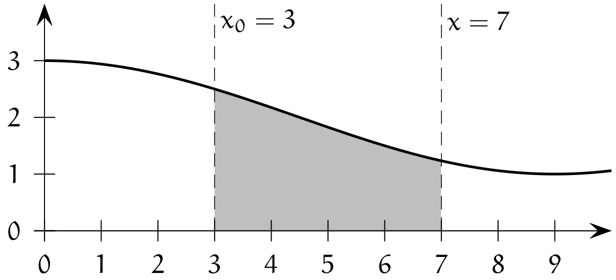

Figura 1. Hemos sombreado el área limitada entre la función, las rectas $x = 3$, $x = 7$ y el eje X.

Dejemos la primera barra vertical fijada y dediquémonos a mover la segunda. Cuando la desplazamos a la derecha, el área crece. Ahora podemos hacer una tabla con los valores del área para diferentes valores de x. Nos podría salir, p.ej.:

$$A(3) = 0 \quad A(4) = 2'5 \quad A(5) = 4'1 \quad A(6) = 5'8 \quad \text{etc.}$$

El primer valor, $A(3)$, es cero porque silas dos barras verticales están juntas, no hay área encerrada. Nos damos cuenta de que estos valores dependen del valor de x_0. Si no fuera 3, serían diferentes, pero no nos importa.

Ahora podemos intentar una nueva perversión: dibujar la gráfica que forman esos valores. Mirad la figura 2. Diremos que la nueva gráfica corresponde a la «función área» de la primera función, o también diremos que la nueva función es «integral» de la primera.

¿Qué ocurre cuando la función original se hace negativa y pasa bajo el eje X? Es frecuente considerar el área *con signo*, es decir: el área por debajo del eje X se considerará negativa. Así, por ejemplo, el área sombreada en la figura 3 es cero.

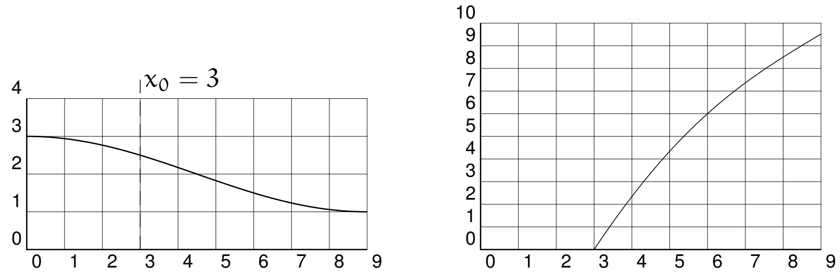

Figura 2. A la izquierda, de nuevo la función original. A la derecha, la «función área»: la altura correspondiente a cada valor de x es el área de la función *desde* el punto $x_0 = 3$ hasta ese punto.

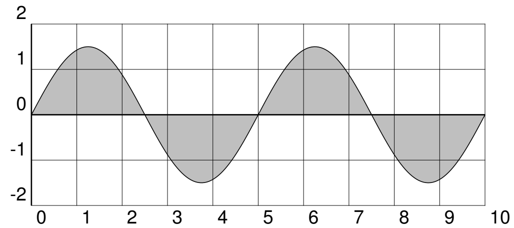

Figura 3. El área sombreada será considerada como cero, porque hay exactamente la misma cantidad sobre el eje X que bajo el eje X.

E1. Una vez que sabes esto, te enfrentas a tu primer desafío. En la figura 4 tienes a la izquierda tienes las gráficas de tres funciones. A la derecha tienes las gráficas de sus funciones área o integrales. Tienes que emparejarlas correctamente.

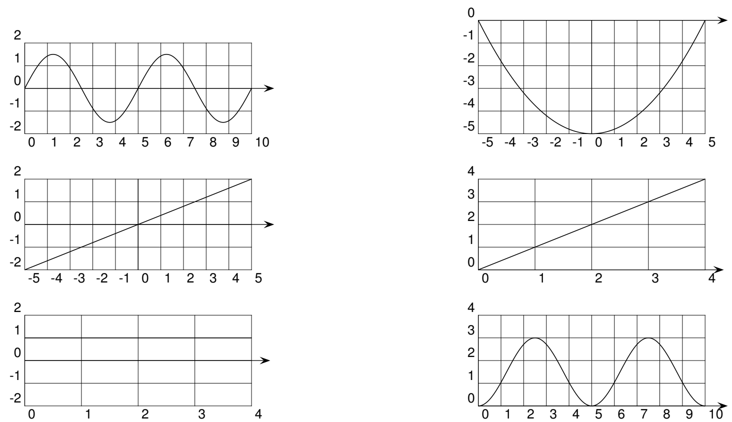

Figura 4. Averigua qué función área (derecha) corresponde con cada función (izquierda).

Uso de la Función Área

Dijimos dos cosas sobre el «punto base» x_0: que los valores de la función área dependían de él, y que no importaba. ¿Por qué? Imagina que nos piden calcular el área sombreada en la figura 5, que va de $x = 3$ a $x = 8$, pero nos dan la función área tomando como «punto base» el $x_0 = 1$. ¿Qué podemos hacer?

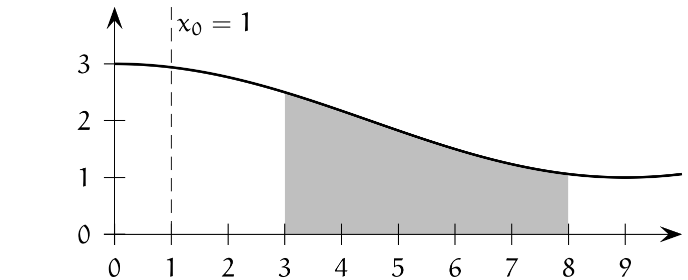

Figura 5. ¿Cómo calcular el área sombreada si tenemos la función área con «punto base» $x_0 = 1$?

El truco consiste en calcular el área entre $x_0 = 1$ y $x = 8$ y *restarle* el área entre $x_0 = 1$ y $x = 3$. En la figura 6 aparece algo más claro.

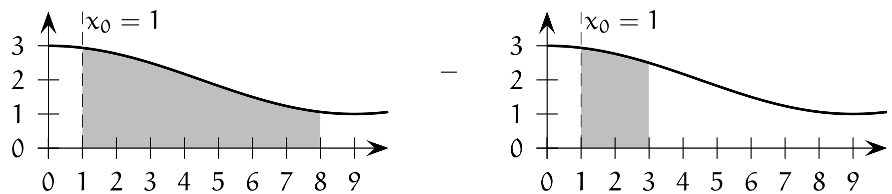

Figura 6. Fácil: restando al área *hasta* $x = 8$ el área *hasta* $x = 3$, usando el «punto base» que me dé la gana.

Lo que debemos hacer es, usando *cualquier valor para* x_0, restar $A(8) - A(3)$. Ese valor es independiente del x_0 utilizado. Veamos un ejemplo.

Nos informan de que la función área (o integral) de $f(x) = 2x$ es $A(x) = x^2$, tomando como $x_0 = 0$ (compruébalo). Ahora nos piden el área delimitada por la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x = 3$ y $x = 6$. Para hacerlo simplemente restamos $A(6) - A(3) = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$.

E2. Para la función $f(x) = 1 - x/2$ una función integral es $A(x) = x - x^2/4$. ¿Podrías averiguar qué x_0 hemos usado? Calcula el área bajo $f(x)$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Notación

Nos piden el área (con signo) delimitada por una función $f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Sabemos que $A(x)$ es una función área (o integral) de $f(x)$. Entonces, escribimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(x)\big|_a^b = A(b) - A(a)$$

El lado izquierdo se lee «la integral definida de $f(x)$ entre a y b». La razón de la «S» rara y del dx la veremos después. Los valores a y b se llaman «límites de integración». Digamos que ahora lo que nos falta es saber cómo calcular funciones área o integrales. A eso dedicaremos las siguientes secciones.

Función Área de una Función Escalonada

Una función escalonada tiene el aspecto de la figura 7. Es una función definida a trozos que es horizontal en cada uno de ellos. No nos preocuparemos de su expresión analítica, sino tan sólo de calcular su función área.

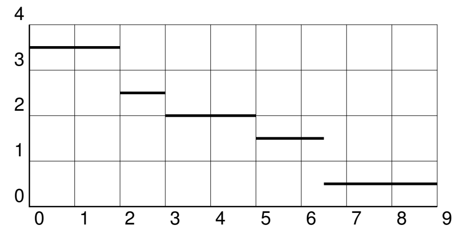

Figura 7. Función escalonada.

No nos preocupamos por los «puntos límite» de cada región y, desde luego, la función no es continua. La razón por la que nos interesa es que el área se construye sumando rectángulos. Vamos, que es fácil. Tomaremos $x_0 = 0$ en este ejemplo.

¿Cuánto vale $A(x)$? Depende de la región en la que esté x. Si $x < 2$, entonces tenemos que calcular el área de un rectángulo de base x y altura $3'5$, así que $A(x) = 3'5x$. Fijaos también en que $A(2) = 7$. Pero, si x entra en la siguiente región, la cosa se complica. El valor 7 «ya le tenemos», pero ahora tenemos que sumar el área del nuevo rectángulo, que tiene área $2'5$ y base $(x - 2)$ (ver figura 8). Juntando todo, tenemos para la segunda región:

$$A(x) = 7 + 2'5(x - 2) = 2 + 2'5x$$

Por tanto, $A(3) = 9'5$ y podemos meternos en la tercera región, $x \in [3, 5]$. El valor $9'5$ ya lo tenemos, y el nuevo rectángulo tiene altura 2 y base $(x - 3)$. Por tanto, en la tercera región:

$$A(x) = 9'5 + 2(x - 3) = 3'5 + 2x$$

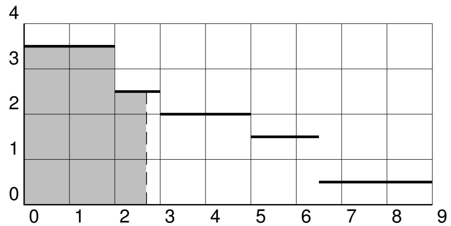

FIGURA 8. Cálculo del valor de $A(x)$ con $x > 2$.

Parece un rollo tremendo, pero ahora hacemos el descubrimiento importante: la función es una *recta* en todos los tramos, y el valor de la *pendiente* coincide con la altura de la función en la región. Echad un vistazo a la figura 9, que es la gráfica de la función área final.

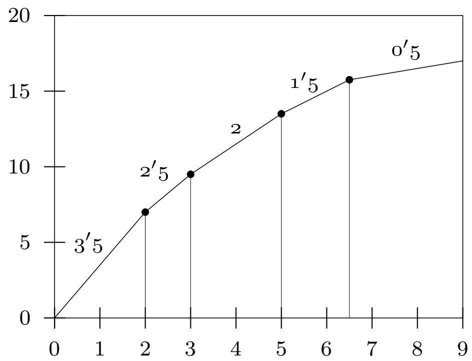

FIGURA 9. La gráfica de la función área o integral de la función anterior. Está formada por tramos rectos. Sobre cada tramo hemos escrito su pendiente.

Así que destacamos como muy importante: la pendiente de cada tramo en la función área de una función escalonada coincide con la altura de la función original en cada tramo.

E3. Considera la función $f(x)$ definida como «parte entera de x», es decir: vale 0 en el intervalo $[0, 1]$, 1 en el intervalo $[1, 2]$, etc. Dibuja la función. Dibuja su función área tomando $x_0 = 0$.

El Teorema Fundamental del Cálculo

Nos fijamos algo mejor en el resultado de la sección anterior. Supongamos que partimos de la función área de una función escalonada. Esta función es continua y «rectilínea por trozos». ¿Qué ocurre si intentamos calcular la derivada de esta función área? Recordamos que la función derivada es la que, en cada punto, nos da la pendiente de la función original. Así que, volviendo a las figuras 9 y 8, nos damos cuenta de que:

«La función $f(x)$ es la **derivada** de la función $A(x)$»

¿Ocurre esto sólo para las funciones escalonadas? Ahora viene el truco final. ¿Recuerdas cuando te decían que un polígono de muchísimos lados es indistinguible de una circunferencia? Pues bien: *una función escalonada con muchísimos escalones es indistinguible de una función «normal»*. Observa la figura 10 para convencerte.

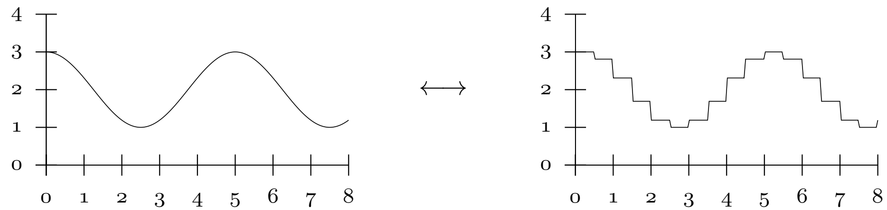

FIGURA 10. Una función escalonada, con muchísimos escalones, no se diferencia de una función «normal».

Por tanto, para cualquier función, la función área es su «antiderivada». Así que, en la siguiente sección, aprenderemos a antiderivar o, como se dice con más frecuencia, a **integrar**.

Integral Indefinida. Integrales Inmediatas

Dada una función $f(x)$, llamaremos su *integral indefinida*, *antiderivada* o *función primitiva* a otra función $A(x)$ que la tenga por derivada. Es decir: $A'(x) = f(x)$. Lo escribiremos así:

$$A(x) = \int f(x) dx$$

sin ponerle «límites». Integrar es un proceso mucho más difícil que encontrar una derivada. Para derivar tenemos unas reglas que son más o menos rollo, pero que funcionan siempre. En cambio, para integrar no hay reglas. Se requiere mucho ingenio, y a veces ni así...

La mejor manera de empezar es con las *integrales inmediatas*, que son las que salen de leer «al revés» una tabla de derivadas. Así, por ejemplo, sabemos que la derivada de x^2 es $2x$. Por tanto, escribimos:

$$\int 2x\,dx = x^2$$

Está bien, pero la derivada de x^2+4 *también* es $2x$. Sea el que sea el número que añadamos, no interfiere. Así que escribiremos:

$$\int 2x\,dx = x^2 + K$$

donde K se llama una *constante de integración*, vale lo que quieras, y tiene que ver con la libertad que teníamos de elegir x_0. Veamos unos cuantos ejemplos.

Calcula la integral $\int 6x^2\,dx$. Primero nos fijamos en que para tener una derivada que es como x^2, tenemos que partir de una función que sea como x^3. La derivada de x^3 es $3x^2$. Pero no tenemos como derivada $3x^2$, sino $6x^2$. ¿Qué hacemos? Fácil: no pongamos x^3 sino $2x^3$. Así su derivada será $2\cdot 3x^2 = 6x^2$. Tenemos:

$$\int 6x^2\,dx = 2x^3 + K$$

Algo más difícil: $\int 4x^2\,dx$. La derivada de x^3 es $3x^2$, como ya dijimos. Podemos dividir la función entre 3: $x^3/3$ da, al derivarla, $3x^2/3 = x^2$. Ahora la multiplicamos por 4: $4/3\,x^3$. Así,

$$\int 4x^2\,dx = \frac{4}{3}x^3 + K$$

Nos piden calcular $\int \exp(x^2)2x\,dx$. Recordamos vagamente que la derivada de una exponencial es ella misma. Aplicando la regla de la cadena, vemos que la derivada de $\exp(x^2)$ es, precisamente, $\exp(x^2)\cdot 2x$, así que ya la tenemos:

$$\int \exp\left(x^2\right) 2x\,dx = \exp\left(x^2\right) + K$$

Este ejemplo es muy típico: nos dan el producto de dos funciones, y una de ellas es «la derivada de lo de dentro». Nos está pidiendo a gritos que usemos la «regla de la cadena» al revés. Otro ejemplo,

Calcula la integral de $1/x$. Fácil: leyendo al revés en la tabla de derivadas, su primitiva es $\ln(x) + K$.

Calcula la integral siguiente:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx$$

Parece chunguísimo, pero recordamos que la derivada de un logaritmo es el inverso de lo que «haya dentro», multiplicado por la derivada de eso mismo. Realmente, el numerador *es la derivada* del denominador, así que:

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx = \ln(x^2+4x+8) + K$$

E4. Calcula las siguientes primitivas:

$$\int 5x^4\,dx \qquad \int \sqrt{x}\,dx \qquad \int \exp(x-2)\,dx \qquad \int \left(\frac{3}{x^2}+x\right)dx$$

$$\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+10}dx \qquad \int \sqrt{x^2+1}\cdot 2x\,dx$$

Cálculo de Áreas

Calcula el área limitada entre la función $f(x) = x^2+1$, el eje X, y las rectas $x=0$ y $x=4$. Para ello calculamos una primitiva:

$$\int f(x)\,dx = x^3/3 + x + K$$

Por simplicidad, deberíamos considerar $K=0$, pero no lo vamos a hacer para que veas que «da igual». Nos piden el área:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = A(x)|_0^4 = A(4) - A(0) = \left(\frac{4^3}{3}+4+K\right) - \left(\frac{0^3}{3}+0+K\right)$$

Pero las K tienen signos opuestos, así que «se cancelan». La cuenta nos queda $64/3 + 4 \approx 25'33$.

Ojo: Aunque hayamos dicho antes que el área se suele considerar «con signo», en realidad cuando nos pidan de manera explícita un área, lo normal es hacer el «apaño» necesario para sumar todas las áreas como positivas. Veamos cómo.

Calcula el área (sin signo) entre la gráfica de $x^2 - 4$, el eje X, y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Ante todo, nos damos cuenta de que la función $f(x)$ cambia de signo en medio del intervalo, como aparece en la figura 11.

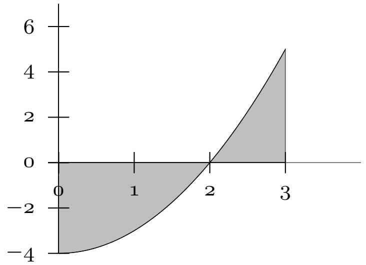

FIGURA 11. El área que nos piden, entre la función $f(x) = x^2 - 4$, el eje X, y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. Consideraremos que no hay áreas negativas.

En la práctica, ¿cómo nos damos cuenta de estas cosas raras? Pues buscando si hay cortes de la función con el eje X en el intervalo que nos piden. Si lo hay, normalmente consideraremos el convenio de «áreas positivas». Empecemos el cálculo real. Necesitamos una primitiva:

$$\int \left(x^2 - 4\right)\, dx = x^3/3 - 4x + K$$

y tomaremos $K = 0$. Ahora calculamos dos áreas: de 0 a 2 y de 2 en adelante. La primera:

$$\int_0^2 \left(x^2 - 4\right)\, dx = A(x)|_0^2 = A(2) - A(0)$$
$$= \left(2^3/3 - 4 \cdot 2\right) - \left(0^3/3 - 4 \cdot 0\right) \approx -5'33$$

que es negativa, como debe ser. Pero la consideraremos positiva de todas formas. Ahora, la segunda parte:

$$\int_2^3 \left(x^2 - 4\right)\, dx = A(x)|_2^3 = A(3) - A(2)$$
$$= \left(3^3/3 - 4 \cdot 3\right) - \left(2^3/3 - 4 \cdot 2\right) \approx 2'33$$

De manera que el área total es $5'33 + 2'33 \approx 7'66$. Si la hubiéramos hecho de una sola tacada, tendríamos $A(3) - A(0) = -3$. El área negativa habría restado...

E5. Calcula las áreas (positivas) limitadas por:

(a) La función $f(x) = \exp(x)$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

(b) La función $f(x) = 1/x$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

(c) La función $f(x) = \sqrt{x}$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 20$.

Área entre dos Funciones

Calcula el área entre las gráficas de $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$. La figura 12 nos las muestra.

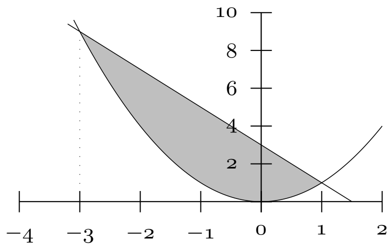

FIGURA 12. El área entre las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3 - 2x$.

Para empezar, si nos piden el área entre dos gráficas es de suponer que éstas se cortan. Lo harán en las soluciones de la ecuación $x^2 = 3 - 2x$, que son $x = -3$ y $x = 1$. Es una *muy* buena idea dibujar las gráficas entre estos dos puntos. Así nos damos cuenta de que la recta está siempre por encima de la parábola. De esa manera, el área pedida será la diferencia de dos áreas, como aparece en la figura 13.

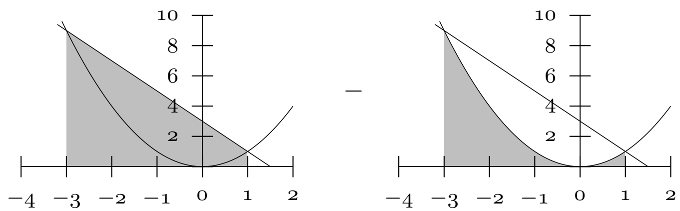

FIGURA 13. El área de la figura 12 es la diferencia entre estas dos.

Por tanto, nos piden calcular:

$$\int_{-3}^{1} (3 - 2x)\, dx - \int_{-3}^{1} x^2\, dx$$

Calculamos cada una por separado en este primer ejemplo. Nos dan, respectivamente:

$$\int_{-3}^{1} (3-2x)\,dx = \left(3x - x^2\right)\Big|_{-3}^{1} = \left(3\cdot 1 - 1^2\right) - \left(3\cdot(-3) - (-3)^2\right) = 20$$

$$\int_{-3}^{1} x^2\,dx = x^3/3\Big|_{-3}^{1} = \left(1^3/3\right) - \left((-3)^3/3\right) \approx 9'33$$

Por tanto, el área pedida es $20 - 9'33 \approx 10'67$.

NOTA: Una vez que tenemos claro cuál es la función que está por arriba, y mientras sea *siempre la misma* podemos calcular el área de la función diferencia en lugar de la diferencia de áreas.

E6. Calcula las áreas entre las siguientes curvas:

(a) $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$.

(b) $y = -x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$.

(c) $y = 8/x$, $y = \sqrt{x}$, el eje X y la recta $x = 8$.

E7. Dada la función $f(x)$, halla el área limitada por ella, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < -1/2 \\ -x^2 + 3x & \text{si } -1/2 < x \leq 3 \\ |x+3| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

INTEGRACIÓN Y SUMA

En realidad, al integrar estamos sumando. Esa es la razón del extraño símbolo $\int$, que inventó Leibniz deformando una «S». Veamos por qué.

Un grifo está echando agua sobre un recipiente. La velocidad, en litros por segundo, sigue la función $V(t) = 10/(t+1)$ (con t en segundos, ver figura 14). El grifo está abierto desde el momento $t = 0$ hasta el $t = 5$. Calcula la cantidad total de agua que habrá en el recipiente.

Una manera de abordar el problema es haciendo una tabla en la que mostremos la velocidad al «comienzo» de cada segundo:

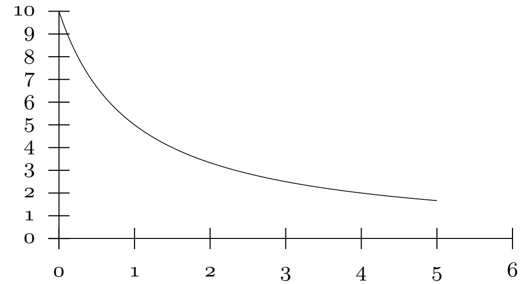

FIGURA 14. Velocidad a la que el grifo emite agua, en función del tiempo.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Velocidad (l/s)	10	5	3'33	2'5	2

Si suponemos que durante todo el intervalo temporal $[0,1]$ emitió agua a $10\,l/s$, entonces durante ese segundo se emitieron 10 litros. Por la misma lógica, se debieron emitir 5 litros en el intervalo $[1,2]$, $3'33$ en el $[2,3]$, $2'5$ en el $[3,4]$ y 2 en el $[4,5]$. En total, $10+5+3'33+2'5+2 = 22'83$ litros. Desafortunadamente, miramos el recipiente y tiene menos. ¿Qué ha pasado?

La hipótesis de que durante todo el primer intervalo, $[0,1]$ se emitió agua a $10\,l/s$ es muy mala. Mirando la gráfica 14 nos damos cuenta de que al final del intervalo la velocidad era mucho menor. ¿Ideas?

Realmente podríamos hacer una tabla mejor, en la que apareciera la velocidad a cada medio segundo:

Tiempo (s)	0	0'5	1	1'5	2	2'5	3	3'5	4	4'5
Velocidad (l/s)	10	6'66	5	4	3'33	2'86	2'5	2'22	2	1'82

En este caso, la cantidad total de agua vertida en el recipiente se calcularía suponiendo que la velocidad es constante durante el intervalo $[0, 0'5]$, igual a $10\,l/s$. Por tanto, durante el primer medio segundo se emitieron $10 \cdot 0'5 = 5\,l$. Durante el intervalo $[0'5, 1]$ la velocidad sería estimada como $6'66\,l/s$, y la cantidad total $6'66 \cdot 0'5 = 3'33\,l$. Luego deberíamos sumar todos esos valores. El resultado se puede expresar así:

$$\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\Delta t$$

donde t_i son los momentos en los que calculamos la velocidad ($t = 0,\ 0'5,\ 1, \ldots$),

Δt es el intervalo temporal que consideramos ($\Delta t = 0'5$) y N es el número de puntos que consideramos (en este caso, 8).

Esta suma (prueba a calcularla tú mismo) da $\approx 20'199$. El valor es menor que antes ($22'83$) y más próximo al real, pero aún no es éste. En realidad, deberíamos tomar Δt muy muy pequeño...

Pero, ¡esperad! La suma anterior tiene una interpretación geométrica. Cada sumando se puede ver como el área de un rectángulo de base Δt y altura $f(t_i)$, y así el valor total sería el área sombreada en la figura 15.

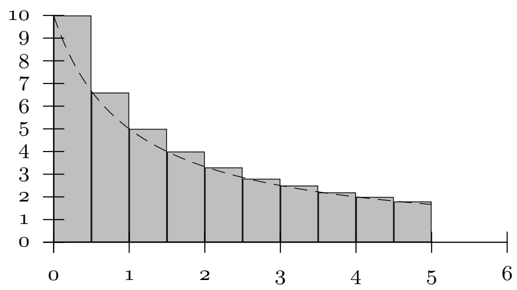

FIGURA 15. El área sombreada corresponde al valor de la suma que hemos calculado. La curva en línea discontinua es nuestra función original.

Si hacemos el Δt más pequeño, los rectángulos serán más numerosos y estrechos. Cuando Δt tiende a cero, la suma se va acercando al *área bajo la función*. Lo escribiremos así:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\Delta t = \int_0^5 f(t)\,dt$$

La suma que calculábamos se llama *suma de Riemann* correspondiente a la integral. De aquí viene el símbolo usado por Leibniz: la $\int$ es una «S» churrigueresca, para indicar *suma*, y el dt proviene del Δt considerado cuando $\Delta t \to 0$.

Por tanto, sabiendo que el valor que nos piden no es más que el área bajo la función, procedemos a integrar como siempre:

$$\int_0^5 \frac{10}{t+1}\,dt = 10\ln(t+1)|_0^5 = 10\ln(6) - 10\ln(1) \approx 17'92 \text{ litros}$$

Y ésta es la cantidad de agua «exacta» que cayó en el recipiente.

E8. Una piedra, al caer, lleva una aceleración constante de ≈ 10 metros por segundo cada segundo. Eso significa que, si parte del reposo, su velocidad en el instante t vendrá dada por $10t$. Al cabo de t segundos cayendo, ¿cuánto espacio ha recorrido una piedra?

E9. El ritmo (anual) al que entran los ingresos en la diminuta nación de Elbonia vino dado por la función $R(t) = 4t - t^2$, donde t está expresado en años (con $t = 0$ correspondiendo al enero de 2000) y $R(t)$ en millones de euros. Si al comenzar 2000 su PIB era de 350 millones de euros, calcula el PIB en enero de 2005.

E10. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0'01t^3 - 0'2t^2 + t + 1$, siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

E11. Expresa mediante una integral el área del triángulo de vértices $(0, 3)$, $(7, 3)$ y $(7, 10)$. Explica el significado de la integral escrita.

E12. Demuestra, usando integrales, que el área de un rectángulo es base por altura.

E13. Sabiendo que $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y que $f(1) = 0$, calcula $f(5)$.

E14. La curva $y = a[1 - (x-2)^2]$, con $a > 0$, limita con el eje de abscisas un recinto de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a.

E15. [D] Suponiendo que un vehículo que se mueve en el seno de un fluido tiene una deceleración proporcional a su velocidad (es decir, $v'(t) = -kv(t)$, donde k es una constante), halla la forma de $v(t)$.