Lugares geométricos.

Un lugar geométrico es el conjunto de puntos del plano (o del espacio, claro) que cumplen una determinada condición. Nos vamos a ocupar aquí de los lugares geométricos "clásicos", es decir: los que habéis visto en dibujo. La diferencia entre lo que estudiamos aquí y lo que estudiáis en dibujo está sólo en el enfoque.

La circunferencia.

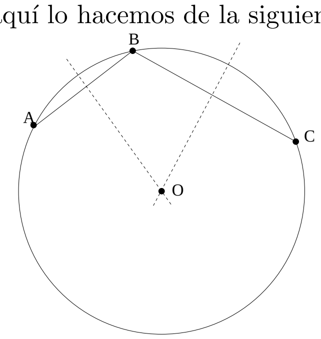
Ecuación.

Como ya vimos, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que distan una cierta cantidad R de un punto dado (x_0, y_0). La ecuación será $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$ o, elevando todo al cuadrado:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Notad que esta ecuación siempre es de la forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

Si ahora nos pidieran, por ejemplo, la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos cualesquiera, sabéis que geométricamente se halla el circuncentro de los tres lados del triángulo que forman (hallando el cruce de las mediatrices). En cambio, aquí lo hacemos de la siguiente forma:



La ecuación de la circunferencia tiene tres parámetros: A, B y C. Como tenemos también tres puntos, nos encontramos con un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Por ejemplo, si los puntos son el $(0, 1)$, el $(1, 1)$ y el $(2, 1)$, la circunferencia que pasa por los tres saldrá de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0 \\ 1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0 \\ 2^2 + 1^2 + A \cdot 2 + B \cdot 1 + C = 0 \end{cases}$$

Cuestiones básicas de geometría de la circunferencia.

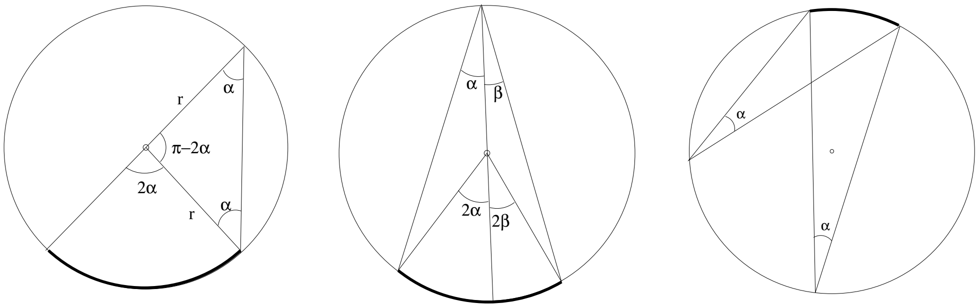
Vamos a comentar unos cuantos teoremas clásicos sobre la circunferencia que os serán de utilidad.

1.- La tangente a una circunferencia en un punto siempre es perpendicular al radio.

Aunque parezca elemental, no hay que olvidarlo. Para calcular la recta tangente a una circunferencia por un punto dado no hay más que calcular un vector perpendicular al que va del centro al punto.

2.- Tomemos cualquier arco en una circunferencia. Visto desde el centro, abarcará un ángulo en radianes igual a la longitud del arco dividido entre el radio (piensa que si el arco fuera toda la circunferencia el ángulo abarcado sería 2π y la longitud sería $2\pi R$...)

Bien hasta ahí. Lo curioso es que si vemos ese mismo ángulo desde cualquier punto de la circunferencia el ángulo que abarcará será justo la mitad del abarcado desde el centro. Se dice que *un ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad que su ángulo central correspondiente*. Véase la figura.



La demostración es fácil. En el caso de que el ángulo inscrito tenga como uno de los lados un diámetro, entonces (la primera figura) el lado OA y el lado OB' son ambos radios, así que el triángulo que determinan es isósceles. Eso implica que el tercer ángulo tiene que valer $2\pi - \alpha$ y, por tanto, el ángulo central tiene que valer 2α.

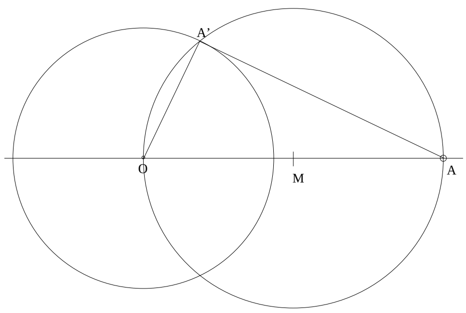
En el caso de que el ángulo inscrito abarque el centro, entonces (la segunda figura) se puede descomponer en dos ángulos que cumplen la condición del párrafo anterior (uno de los lados es un diámetro), y el teorema se cumple también. Dejamos al lector la prueba en el caso de un ángulo que no abarque al centro (es fácil).

Como consecuencia de lo anterior se deduce que:

– El ángulo inscrito en una circunferencia tiene una medida que depende sólo del arco que abarca, no del punto de vista. (la tercera figura). Así, un futbolista que va a tirar a puerta tiene el mismo ángulo para tirar en cualquiera de los puntos de la circunferencia.

– El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. La razón es su ángulo central asociado es siempre de π radianes. ¿Podrías hacer el dibujo?

3.- El trazado de una tangente a una circunferencia que pasa por un punto dado se hace de la siguiente manera. Sabemos (punto 1) que la recta tangente tiene que ser perpendicular al radio, así que proponemos la siguiente construcción (ver figura):

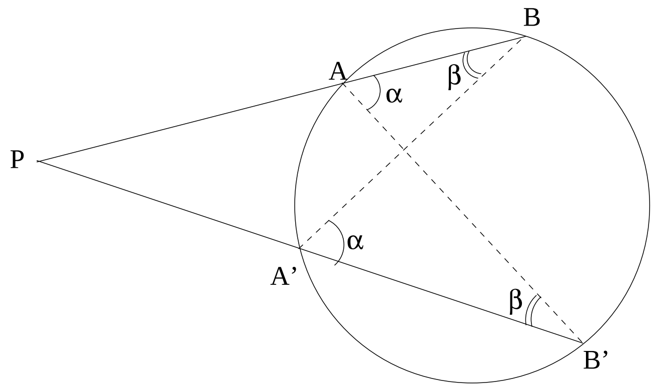


Sea O el centro de la circunferencia y A el punto exterior a la misma por el que queremos trazar la tangente. Hallamos el punto medio M entre estos puntos y trazamos la circunferencia que tiene centro M y llega a los dos. Esta circunferencia corta a la antigua en otro punto A'. Unimos A' con A y tenemos la tangente pedida. ¿Por qué? Porque el ángulo $OA'A$ es recto por lo dicho antes (es un ángulo inscrito en una semicircunferencia), así que la recta $A'A$ es normal a la recta OA', que es un radio. (Chanánnnn).

Potencia de un punto respecto a una circunferencia.

Traza un segmento desde un punto a una circunferencia. En general, la cortará en dos puntos, A y B, tanto si el punto está dentro como si está fuera. Ahora multiplica los dos segmentos PA y PB, y añade un signo menos si el punto era interior. Ese valor se llama la **potencia** del punto respecto a la circunferencia.

La gracia es que el valor de $\mathcal{P}$ no depende del par de puntos que tomemos. La razón se basa en la siguiente figura:



Hemos trazado desde un punto P dos secantes a la circunferencia, que la cortan en los puntos A, B, A' y B'. Notad cómo los dos ángulos marcados como α tienen que ser iguales pues abarcan el mismo arco, e igual con los dos ángulos marcados β. Por tanto, los triángulos $PA'B$ y PAB' tienen que ser semejantes (tienen los tres ángulos iguales).

Por tanto, los lados tienen que ser proporcionales: PA/PB' tiene que ser igual que PA'/PB, y así: $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$. Por tanto, la potencia es igual se tome la recta que se tome.

La manera más fácil de calcular la potencia es tomando una recta secante particular: la que pasa por el centro de la circunferencia. Sea d la distancia del punto P a dicho centro, y sea R el radio de la circunferencia. La susodicha potencia valdrá

$$PA \cdot PB = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$$

pero eso es igual a:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$$

Es decir: para calcular la potencia de un punto respecto a una circunferencia, se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación de ésta. Si el valor es igual a cero, es que el punto pertenecía a la circunferencia. Si es positivo, es exterior; y si es negativo, es interior.

P.ej.: Halla la potencia del punto $(2, 2)$ respecto a la circunferencia de radio 1 y centro $(1, 0)$.

La ecuación de la circunferencia en cuestión es:

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 - 1^2 = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Sustituyendo el punto $(2, 2)$:

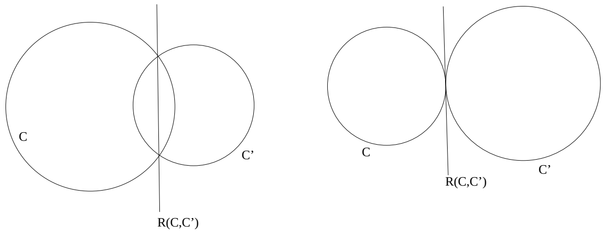
$$2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 4$$

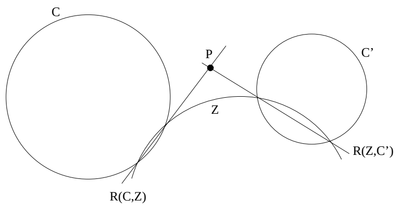
Se define **eje radical** de dos circunferencias como el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas. Es decir: si la primera circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ y la segunda es $x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$ entonces el eje radical viene dado por:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \longrightarrow (A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0$$

Por tanto, el eje radical debe ser *una recta*.

Gráficamente, el eje radical se halla así:





– Si las circunferencias son secantes, toma la línea que pasa por los dos puntos de intersección.
– Si las circunferencias son tangentes, toma la recta tangente común a ambas.
– Si las circunferencias son exteriores, traza dos circunferencias auxiliares que sean secantes a ambas. Toma la primera de éstas y traza los ejes radicales que tiene con ambas circunferencias iniciales. Estas dos rectas se cortan en un punto, que llamamos "centro radical" de las tres circunferencias. Haz lo mismo con la otra circunferencia y traza la línea que une los dos centros radicales.

Cuestiones generales sobre lugares geométricos

Traslación.
Supongamos que tenemos la ecuación de un lugar geométrico cualquiera, y nos piden la ecuación del mismo lugar pero trasladado según el vector (x_0, y_0). La figura inicial cumplía la ecuación dada por $f(x, y) = 0$ (por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$). Si os fijáis, trasladar la figura a otro punto significa, más o menos: "si restásemos a cada punto las coordenadas del vector (x_0, y_0), nos quedaría un punto de la figura inicial, que cumple la ecuación tal". Así, podemos decir que la figura trasladada cumple: $f(x - x_0, y - y_0)$.
Un ejemplo práctico. La circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$ trasladada según el vector $(2, 4)$ se calcula sustituyendo cada x por $(x - 2)$ y cada y por $y - 4$. Así queda: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16 = 0$. ¿Se ve?

Tangente en un punto a una curva.
Sea una curva dada por una ecuación implícita $f(x, y) = 0$. Por ejemplo, la curva $x^2 + y + x \cdot \sqrt{y} = 4$. Supongamos que nos piden la ecuación de la recta tangente a esa figura en el punto $(0, 4)$ (que pertenece a la curva, como podéis comprobar). Para tener la recta tangente tendríamos que tener el valor de la derivada $y'(x)$ en el punto $x = 0$. Pero para averiguar ese valor tendríamos primero que despejar $y(x)$, y eso parece muy difícil...
Una solución es derivar implícitamente, como hacíamos en el primer trimestre. La ecuación anterior quedaría derivada con respecto a x así:

$$x^2 + y + x \cdot \sqrt{y} = 4 \longrightarrow^{d_x} 2x + y' + \sqrt{y} + x \cdot (1/2)y^{-1/2} \cdot y' = 0$$

Es decir:

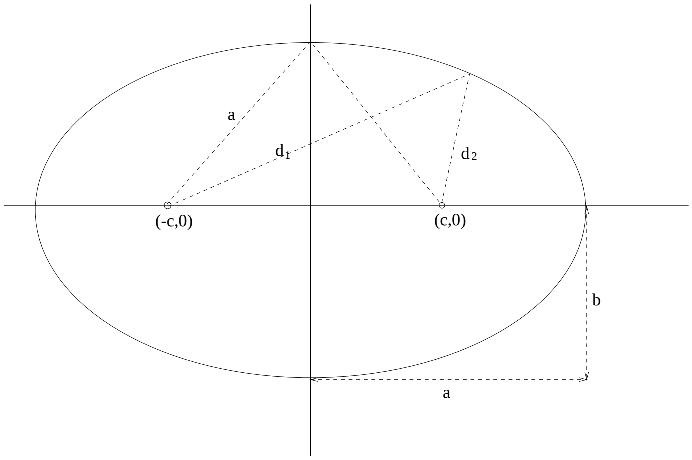
$$y' = \frac{-2x - \sqrt{y}}{1 + (x/2\sqrt{y})}$$

Y, sustituyendo las coordenadas del punto obtenemos la tangente: $y' = -2$. Ahora puedo hallar la ecuación de la recta tangente imponiendo que pase por el punto indicado.

Secciones cónicas.

La elipse.

La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos fijados llamados focos suman siempre una cantidad dada.



La ecuación de la elipse se halla así. Sean $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ las coordenadas de los dos focos de la elipse. Entonces, se puede expresar la condición como:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

donde $2a$ es la susodicha distancia prefijada. Pasamos una de las raíces al otro miembro y elevamos al cuadrado:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Simplificamos términos y nos queda:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados me queda:

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a(x-c)^2 + ay^2$$

Volviendo a simplificar:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ahora definimos $b^2 = a^2 - c^2$ y, dividiendo todo entre a^2 y b^2 obtengo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

¿Qué significan realmente la a, la b y la c? La c es la distancia del centro a cada uno de los focos. La a es el semieje mayor, y la b (véase haciendo un dibujo) es, por el teorema de Pitágoras, el semieje menor.

Definimos la *excentricidad de una elipse* como el valor $e = c/a$. Si la excentricidad es nula, entonces $c = 0$, los dos focos están juntos en el centro y la elipse se convierte en una circunferencia. Notad que siempre tiene que ser cierto que $c < a$, así que siempre $e < 1$.

Para cambiar la elipse de centro, como para trasladar cualquier figura, hágase lo siguiente: para pasar el centro del origen de coordenadas al punto (X_0, Y_0), réstense esas componentes de las coordenadas reales. Así, la elipse

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

pasaría a ser, con centro el punto $(2, -1)$:

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$$

La forma general de la ecuación de una elipse es algo distinta de la ecuación de la circunferencia:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Un problema tipo: halla el centro de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$. La manera más cómoda de hacerlo es "completando cuadrados". Sabes que el $x^2 - 6x$ proviene de un desarrollo del tipo $(x-p)^2$. ¿Cuánto tiene que valer p? Sabiendo que $(x-p)^2 = x^2 - 2px + p^2$, tenemos que p tendrá que valer 3. Igual con la y: $4y^2 - 8y$ tiene que provenir de un desarrollo del tipo $(2y^2 - q)^2 = 4y^2 - 4qy + q^2$, así que $q = 2$. Por tanto, el centro tendrá que ser el punto $(3, 2)$.

Pero, ¡por favor, no os aprendáis recetas! Lo mejor en matemáticas es que tengáis sentido común y sepáis razonar las cosas...

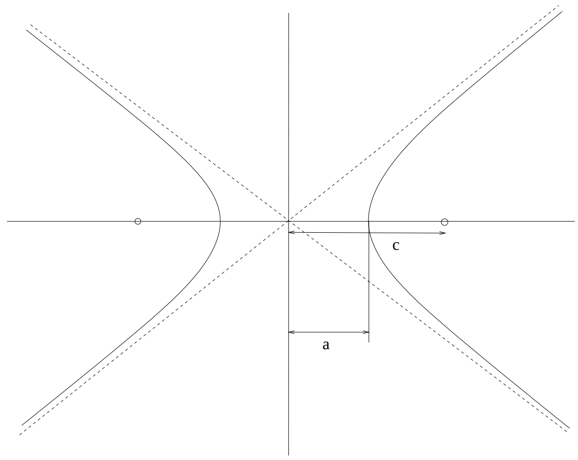
Si trazamos la tangente a la elipse por cualquier punto y dibujamos los segmentos desde los dos focos hasta ese punto ocurre que los ángulos que forman estos dos segmentos con la tangente son iguales. La aplicación es directa: si se cumplen las leyes de la reflexión (ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión) cualquier objeto (luz, una pelota, sonido...) lanzado desde uno de los focos rebotará en la pared y llegará al otro. Dejamos al ingenioso/a lector/a que encuentre aplicaciones a esta chorradilla.

La hipérbola.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que la resta de las distancias a dos puntos dados llamados focos es una constante. El cálculo de la ecuación es exactamente igual que en la elipse, y espero que a nadie sorprenda que de como resultado:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con $b^2 = c^2 - a^2$. La diferencia está en la interpretación geométrica de a y de b.



La distancia a representa la distancia del centro al vértice de la hipérbola, mientras que b ya no tiene ningún significado geométrico obvio. También aquí se define la excentricidad como $e = c/a$, pero siempre la tiene mayor o igual que 1. La hipérbola es tanto más abierta cuanto mayor sea la excentricidad.

La ecuación general de una hipérbola con los ejes paralelos a los ejes coordenados será, por tanto, de la forma:

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Notad el signo $-$ entre la x y la y. Es la clave.

La hipérbola, a diferencia de la elipse, se extiende hasta el infinito. Se puede ver en el dibujo que tiene dos asíntotas simétricas. La ecuación de éstas (se deja como ejercicio al lector su cálculo) es $y = \pm b/ax$.

Se llama hipérbola equilátera a la que tiene a y b iguales: $x^2 - y^2 = a^2$. Tiene las asíntotas, claro a 45°. Si hacemos un giro para dejar las asíntotas como ejes horizontal y vertical, la ecuación de la hipérbola se convierte en $xy = a^2/2$ (no lo demostramos este curso). Esa última es la *ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas*.

La hipérbola también tiene una propiedad focalizadora. Supón que quitamos una de las ramas. Entonces si ponemos una fuente de luz en el foco cuya rama hemos quitado, y la otra rama la espejamos, la luz "rebotará" en esta otra rama como si proviniera del segundo foco. Tenemos, por tanto, una imagen virtual.

La parábola.

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada directriz. Si tiene el vértice en el origen de coordenadas y la recta directriz es horizontal $y = -p$, tenemos la ecuación:

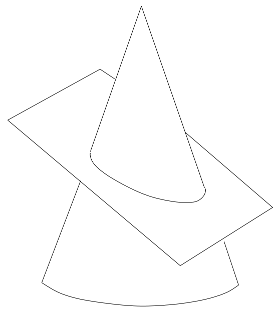
$$4py = x^2$$

Esta parábola, claro está, es vertical. Si la queréis poner horizontal no tenéis más que intercambiar la x y la y. La ecuación de la parábola tiene de particular que sólo una de las dos variables (la x ó la y) está elevada al cuadrado.

La propiedad reflectora de la parábola es la más importante: si le llegan rayos paralelos, los reflejará al foco.

Secciones cónicas.

Las cuatro curvas estudiadas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) se llaman secciones cónicas, porque todas se obtienen de cortar un cono por distintos planos.



Si tenemos una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, es de seguro una cónica con los ejes paralelos a los ejes coordenados. ¿Qué tipo será?

– Si $A = B$, será una circunferencia (los dos ejes "valen igual").

– Si $A \neq B$, pero sus signos iguales, es una elipse (uno de los ejes, "vale menos" que el otro).

– Si los signos de A y B son distintos, es una hipérbola (los ejes son radicalmente distintos). Si $A = -B$, es una hipérbola equilátera.

– Si uno de los dos, A ó B, es cero, es una parábola.

Todas se pueden expresar por su relación con un foco y una recta directriz. En general, una cónica es el lugar geométrico de los puntos tales que el cociente entre su distancia a una recta llamada directriz y a un punto llamado foco es una constante, llamada *excentricidad*. Así, en el caso $e = 1$ la distancia al foco y a la recta son iguales. En el caso de la elipse, la distancia al foco es mayor que la distancia a la recta $e < 1$ y en la hipérbola ocurre al revés. Dejamos la demostración de este hecho como ejercicio.

Superficie esférica.

Ya, para terminar el curso, damos un lugar geométrico espacial: la esfera es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno dado. En tres dimensiones, tenemos:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

O bien, elevando al cuadrado y desarrollando los cuadrados queda algo así:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

El único punto importante a darse cuenta es que ya no tiene una recta tangente en un punto, sino un plano. Este plano se calcula simplemente imponiendo que sea perpendicular al radio.