Sistemas de Ecuaciones y Matrices.

Método de Gauss.

Vamos a desarrollar un método para resolver sistemas de ecuaciones que se llama **método matricial**. No penséis que es algo exótico: no es más que taquigrafía y sentido común. Una *matriz* es simplemente una «caja de números». Así, por ejemplo, podemos hacer la siguiente conversión:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 5x+10y+20z=90 \\ x-3y=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 10 & 20 & 90 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

¿Ves? No hemos hecho más que meter los coeficientes del sistema en una caja. Seguramente sólo en la tercera ecuación habrá duda de cómo han aparecido los números: «1» por x, «-3» por $-3y$, «0» por que no hay z. ¿Se ve?

E1. Traduce a una matriz el sistema de ecuaciones, y a un sistema en x, y y z la matriz.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-z=-2 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

La idea básica de la solución es que hay un tipo de sistemas que son especialmente fáciles. Son los sistemas «**escalonados**». Un ejemplo (en notación normal y matricial):

$$\begin{cases} 3x+2y+z=11 \\ -y+2z=5 \\ -2z=-6 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Este sistema se resuelve de «abajo hacia arriba». La última ecuación es la más sencilla: $-2z=-6$, por tanto $z=3$. Ahora podemos resolver la ecuación superior: $-y+2z=5$, porque sabemos el valor de z. Así, $-y+6=5$ y, por tanto, $y=1$. Por último, nos vamos a la ecuación superior: $3x+2y+z=11$, de la que conocemos el valor de y y el de z: $3x+2+3=11$, por tanto $x=2$. Fácil, ¿no?

Desgraciadamente, la mayoría más absoluta de los sistemas no son escalonados. Por tanto, tenemos que aprender a transformarlos. Usaremos las siguientes **reglas básicas** de resolución:

• Una fila de una matriz se puede multiplicar por cualquier número. Es decir, que si tenemos $x+y=2$, entonces $2x+2y=4$.

• Se puede sumar o restar una fila a cualquier otra. En otras palabras, si $x+y=4$ y $2x+3y=1$, entonces $3x+4y=5$, ¿no?

Fijaos otra vez en la matriz del sistema escalonado. Tiene todo ceros debajo de la diagonal, ¿no es así? Veamos cómo podemos «fabricar» esos ceros. Partamos ahora del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y-z=2 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Ahora supongamos que queremos *anular* el «1» de la segunda fila (no nos importa qué pase con el resto). Podemos hacerlo *restando* a la segunda fila la primera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Cada vez que hagamos una transformación marcaremos el cambio de esa manera. ¡Acordaos de hacer el cambio a toda la fila! Ahora vamos a machacar el «2» de la tercera fila restándole el doble de la primera.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Bien. Para que el sistema quede escalonado sólo queda quitarnos de encima el «-3» de la tercera fila. Podemos hacerlo sumándole tres veces la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

¡Lo conseguimos! El sistema ya es escalonado. Vamos a resolverle.

$$\begin{array}{rcccl} -5z = -15 & & & \longrightarrow & z = 3 \\ y - 2z = -6 & \longrightarrow & y - 6 = -4 & \longrightarrow & y = 2 \\ x + y + z = 6 & \longrightarrow & x + 2 + 3 = 6 & \longrightarrow & x = 1 \end{array}$$

Ahora, glorioso final, comprobamos que se cumplen las tres ecuaciones y nos vamos a celebrarlo con unas cañas. Ea.

En Conclusión: el método matricial consiste en usar una notación abreviada: anotar sólo los coeficientes (recordando un poco al método de Ruffini) y luego «hacer ceros» a base de sumar o restar filas entre sí.

Los ceros tienen que servir para que: (a) haya una ecuación en la que sólo aparezca el coeficiente de una variable (la z en nuestro caso); (b) haya otra ecuación en la que sólo aparezca la variable anterior y otra... y así sucesivamente.

Si te das cuenta, con este sistema ¡puedes abordar ecuaciones con el número de incógnitas que quieras!

E2. Resuelve los siguientes sistemas por el método matricial:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 8 \\ y = 2z - x \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x = 2y + z - 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

E3. Resuelve el siguiente sistema de... ¡cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas!

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 2t = 2 \\ x + 2y + 3z + 4t = 10 \end{cases}$$

E4. Escribe un sistema de tres ecuaciones cuyas soluciones sean 1, 3 y 5 y resuélvelo.

Sistemas Indeterminados.

Un sistema es **indeterminado** cuando tenemos menos ecuaciones que incógnitas. Esto puede ocurrir de formas insospechadas, como en el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

En principio, tiene dos incógnitas y dos ecuaciones, pero en la práctica la segunda ecuación no *aporta ninguna información*: ¡es simplemente el doble de la primera! Intenta resolver el sistema, para asegurarte.

En un caso así, podemos tirar la segunda ecuación a la basura y quedarnos con el «sistema» $2x+y = 4$. Al ser indeterminado, no tiene una única solución, sino muchas. Por ejemplo: $x = 1$ e $y = 2$ es una solución. Pero también $x = 2$ e $y = 0$ es otra. Hay una manera de obtener todas de una tacada. Despejamos una de las dos incógnitas, por ejemplo, la y: $y = 4 - 2x$. Por tanto, podemos poner como solución cualquier x, pero la y tendrá que ser $4 - 2x$.

Con dos incógnitas es algo tonto. Veamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 2 \end{cases}$$

que tiene un aspecto muy inocente. Pero he aquí que cuando lo intentamos resolver obtenemos ($F_2 - 2F_1$, $F_3 - 3F_1$),

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

¡Un momento! Las dos últimas filas son iguales. Si intentamos hacer el último cero, se nos anula la tercera por completo. Eso quiere decir que *la tercera ecuación sobraba*. ¿Por qué? Fijaos con calma en el sistema: ¡la tercera ecuación es la suma de las otras dos! ¡No da información! ¡Es un timo! ¡Que me devuelvan mi dine...! Bueno, ya me callo.

Por tanto, tenemos dos ecuaciones y *tres* incógnitas. ¿Qué hacer? Habrá infinitas soluciones (¿puedes encontrar una?) Igual que antes, podemos elegir una de las incógnitas (por ejemplo, la z) y «pasarla al otro lado». Partiendo del sistema ya escalonado obtendríamos:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 + z \\ y = -4 - z \end{cases}$$

Ahora, como «sabemos» el valor de y, le sustituímos en la x y tenemos: $x + 2(-4 - z) = 2 + z$, así que $x = 10 + 3z$. Ya tenemos la «solución»:

$$x = 10 + 3z, \qquad y = -4 - z$$

¿y la z? ¡lo que quieras! La gracia de esta solución es que te permite obtener infinitas de ellas con sólo elegir un valor para una de las incógnitas. Por ejemplo, si elegimos $z = 1$, entonces $y = -4 - 1 = -5$, y $x = 10 + 3 \cdot 1 = 13$.

En muchos casos, por aquello de la elegancia, se escoge una letra cualquiera (a veces griega, p.ej. λ) y se escribe la solución así:

$$x = 10 + 3\lambda, \qquad y = -4 - \lambda, \qquad z = \lambda$$

E5. Para el sistema anterior, averigua la solución que tiene $x = 1$.

E6. Resuelve el siguiente sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$$

E7. Añade una ecuación al sistema siguiente para que resulte un sistema indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 10 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases}$$

Siempre que sistema de tantas ecuaciones como incógnitas sea indeterminado es porque alguna de las ecuaciones no aporta información, se puede deducir de las otras. Entonces se dice que esa ecuación es **combinación lineal** de las otras.

Un ejemplo: la ecuación $2x + 5y + 7z = 10$ es combinación lineal de las ecuaciones $x + 3y + 2z = 5$ y $x + 2y + 5z = 5$ (¿ves cómo?). Otro ejemplo: la ecuación $3y + 3z = 2$ es combinación lineal de $x + y + z = 1$ y $2x - y - z = 0$, porque se obtiene de ellas multiplicando la primera por dos y restando la segunda.

E8. Escribe dos ecuaciones diferentes que sean combinación lineal de $x + y + z = 4$ y $2x - y = 6$.

Sistemas Incompatibles.

Hay ecuaciones que son totalmente imposibles de cumplir. Por ejemplo, $0x = 5$. Otro ejemplo,

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Si $x + y$ vale 4... ¿¡cómo va a valer 5!? *No way*. Veamos un caso menos obvio:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 3 \end{cases}$$

¡Sí! Es *casi* el mismo sistema de antes, salvo por un pequeño cambio (búscalo). Veremos cómo cambia el resultado. Haciendo las mismas transformaciones ($F_2 - 2F_1$ y $F_3 - 3F_1$) llegamos a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

¡Vaya! Así que $0 = 1$. Bueno, yo soy muy liberal, pero... Eso indica que el sistema es **incompatible**. No hay ninguna solución.

E9. Añade una ecuación a $x + y = 1$ para que resulte un sistema incompatible.

E10. Discute el siguiente sistema (es decir: di si es indeterminado, o si es incompatible...)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ x - y = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

Sistemas con un Parámetro.

A veces un sistema tiene infiltrado un valor desconocido que *no* es una incógnita. Nos pueden preguntar, por ejemplo: ¿cuándo el siguiente sistema es irresoluble?

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = k \end{cases}$$

Veamos, de cabeza. La segunda ecuación «parece» el doble de la primera. Lo es, exactamente, si $k = 6$. En ese caso, el sistema es indeterminado. En caso de que $k \neq 6$, entonces la segunda ecuación «contradice» a la primera. Por tanto, el sistema es incompatible.

E11. Discute el siguiente sistema en función del parámetro k:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ kx + 4y = 4 \end{cases}$$